XVI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Uruguai, 2001

Primeiro dia
Duração da Prova: 4 h e 30 minutos.

PROBLEMA 1

Dizemos que um número natural n é "charrua" se satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- Todos os algarismos de n são maiores que 1
- Sempre que se multiplicam quatro algarismos de n, obtém-se um divisor de n.

Demonstrar que para cada número natural k existe um número "charrua" com mais de k algarismos.

PROBLEMA 2

A circunferência inscrita no triângulo ABC tem o centro O e é tangente aos lados BC, AC e AB nos pontos X, Y e Z, respectivamente. As rectas BO e CO intersectam a recta YZ nos pontos P e Q, respectivamente.

Demonstrar que se os segmentos XP e XQ têm o mesmo comprimento, então o triângulo ABC é isósceles.

PROBLEMA 3

Sejam S um conjunto de n elementos e $S_1, S_2, \ldots, S_k$ subconjuntos de $S (k \geq 2)$, cada um deles com pelo menos r elementos.

Demonstrar que existem i e j, com $1 \leq i < j \leq k$, tais que o número de elementos comuns a S_i e S_j é maior ou igual a $r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$.

Segundo dia
Duração da Prova: 4 h e 30 minutos.

PROBLEMA 4

Determinar o número máximo de progressões aritméticas crescente de três termos que pode ter uma sucessão $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ de $n \geq 3$ números reais.

Nota: três termos a_i, a_j, a_k de uma sucessão de números reais formam uma progressão aritmética crescente se $a_i < a_j < a_k$ e $a_j - a_i = a_k - a_j$.

PROBLEMA 5

Num tabuleiro de 2000 × 2001 as casas têm coordenadas (x, y) com x, y inteiros, $0 \leq x \leq 1999$ e $0 \leq y \leq 2000$. Uma nave no tabuleiro mose-se da seguinte maneira:

antes de cada movimento, a nave está numa posição (x, y) e tem uma velocidade (h, v) onde h e v são inteiros. A nave escolhe uma nova velocidade (h', v') de forma que $h' - h$ seja igual a –1, 0 ou 1 e $v' - v$ seja igual a –1, 0 ou 1. A nova posição da nave será (x', y') onde x' é o resto da divisão de $x + h'$ por 2000 e y' é o resto da divisão de $y + v'$ por 2001.

Há duas naves no tabuleiro: a marciana e a terrestre que quer capturar a marciana.

Inicialmente cada nave está numa casa do tabuleiro e tem velocidade (0, 0). Move-se primeiro a nave terrestre e continuam movendo-se alternadamente.

Existe uma estratégia que permita sempre à nave terrestre capturar a nave marciana, quaisquer que sejam as posições inicias?

Nota: a nave terrestre, que sempre vê a marciana, captura a marciana se depois de um movimento seu cai na mesma posição da marciana.

PROBLEMA 6

Demonstrar que é impossível cobrir um quadrado de lado 1 com cinco quadrados iguais de lado menor que $\frac{1}{2}$.