XVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

El Salvador, 2002

Primeiro dia
Duração da Prova: 4 h e 30 minutos.

PROBLEMA 1
Os números inteiros desde 1 até 2002, ambos incluídos, escrevem-se num quadro por ordem crescente $1,\ 2, ...,\ 2001,\ 2002$. Em seguida apagam-se os que ocupam o primeiro lugar, quarto lugar, sétimo lugar, etc., ou seja, os que ocupam os lugares da forma $3k + 1$.
Na nova lista apagam-se os números que estão nos lugares da forma $3k + 1$. Repete-se este processo até que se apagam todos os números da lista. Qual foi o último número que se apagou?

PROBLEMA 2
Dado qualquer conjunto de 9 pontos no plano entre os quais não existem três colineares, demonstre que para cada ponto P do conjunto, o número de triângulos que têm como vértices três dos oito pontos restantes e P no seu interior, é par.

PROBLEMA 3
Um ponto P é interior ao triângulo equilátero ABC e é tal que $\angle APC = 120°$. Sejam M a intersecção de CP com AB e N a intersecção de AP com BC. Encontrar o lugar geométrico do circuncentro do triângulo MBN quando P varia.

Segundo dia
Duração da Prova: 4 h e 30 minutos.

PROBLEMA 4
Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissectriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até à recta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC.
Demonstre que $\angle EMD = \angle DMF$.

PROBLEMA 5
A sucessão de números reais $a_1, a_2, ...$ define-se como:

$$a_1 = 56 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n} \text{ para cada inteiro } n \geq 1.$$

Demonstre que existe um inteiro $k, 1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

PROBLEMA 6

Um polícia tenta capturar um ladrão num tabuleiro de 2001×2001. Eles jogam alternadamente. Cada jogador, na sua vez, deve mover-se uma casa num dos três seguintes sentidos:

$\downarrow$ (abaixo); $\longrightarrow$ (direita); $\nwarrow$ (diagonal superior esquerda).

Se o polícia se encontra na casa da esquina inferior direita, pode usar a sua jogada para passar directamente para a casa da esquina superior esquerda (o ladrão não pode fazer esta jogada). Inicialmente o polícia está na casa central e o ladrão está na casa vizinha diagonal superior direita do polícia. O polícia começa o jogo.

Demonstre que:

a) O ladrão consegue mover-se pelo menos 10000 vezes sem ser capturado.
b) O polícia possui uma estratégia para capturar o ladrão.

Nota: O polícia captura o ladrão quando entra na casa em que está o ladrão. Se o ladrão entra na casa do polícia, não há captura.