V OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
9 DE NOVEMBRO DE 2002

PROBLEMA 1. [4 pontos]
Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existe um inteiro m tal que

$$m+\frac{1}{5}<\frac{(1+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}<m+\frac{4}{5}$$

PROBLEMA 2. [5 pontos]
Calcule o volume do sólido em $\mathbb{R}^3$ descrito por

$$x^2+3y^2+z^2\leq 1,\ 3x^2+y^2+z^2\leq 1.$$

PROBLEMA 3. [5 pontos]
A velocidade em terra de uma avião é a velocidade escalar de sua projeção radial na terra (i.e., a interseção da superfície da terra com o segmento que liga o centro da terra ao avião).

a) **[2 pontos]** Supondo que a terra seja uma esfera perfeita, prove que a velocidade em terra é sempre menor ou igual à velocidade do avião.
b) **[3 pontos]** Supondo que a terra seja um elipsóide de revolução, determine se a velocidade em terra ainda é sempre menor ou igual à velocidade do avião.

PROBLEMA 4. [6 pontos]
Diga se existe uma enumeração $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ de todos os racionais positivos para a qual exista o limite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n}\ .$$

PROBLEMA 5. [6 pontos]
Prove que, para $n>2$, não existem polinômios não constantes com coeficientes reais $p(x),\ q(x)$ e $r(x)$ primos entre si tais que

$$(p(x))^n+(q(x))^n=(r(x))^n.$$

PROBLEMA 6. [8 pontos]

Dado um inteiro positivo n e um número real positivo ε, seja $f(n,\varepsilon)$ o número máximo de elementos de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|v| = 1$ para todo $v \in X$ e

$$v, v' \in X, v \neq v' \Rightarrow |\langle v, v' \rangle| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, diga se existe algum inteiro positivo k para o qual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n,\varepsilon)}{n^k} = 0.$$

Obs. : $\langle v, v' \rangle$ denota o produto interno entre v e v'.

PROBLEMA 7. [9 pontos]

Prove que existem funções contínuas $a_1, a_2, a_3, ..: [0,1] \to (0,+\infty)$ tais que

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) < +\infty, \forall t \in [0,1].$

ii) Para toda seqüência (b_n) de termos positivos com $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ existe $t \in [0,1]$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n(t)} = 0.$$