XI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
8 de Novembro de 2008

PROBLEMA 1. [5 pontos]
Seja n um número inteiro positivo não divisível por 2 nem por 5. Na representação decimal infinita do número $\frac{1}{n} = 0,a_1a_2a_3\ldots$ escolhe-se arbitrariamente um número finito de dígitos depois da vírgula, os quais são apagados. Claramente o número decimal obtido é racional também e portanto pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros. Demonstrar que b é divisível por n.

PROBLEMA 2. [5 pontos]
Demonstre que para cada número natural n existe um polinômio $f(x)$ com coeficientes reais, de grau n, tal que o polinômio $p(x) = f(x^2 - 1)$ é divisível por $f(x)$ no anel $\mathbb{R}[x]$.

PROBLEMA 3. [5 pontos]
Demonstre a desigualdade $x + \frac{1}{x^x} < 2$ para $0 < x < 1$.

PROBLEMA 4. [6 pontos]
Dois vértices A e B de um triângulo ABC estão localizados em uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ de tal forma que os lados AC e BC são tangentes à parábola. Sejam m_c o comprimento da mediana CC_1 do triângulo ABC e S a área do triângulo ABC. Encontrar $\frac{S^2}{m_c^3}$.

PROBLEMA 5. [6 pontos]
Encontre todos os números inteiros positivos n para os quais existem números inteiros positivos $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ tais que

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2 = n.$$

PROBLEMA 6. [6 pontos]

a) (2 pontos) Determinar se existem ou não matrizes $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ que satisfazem a condição $A^2 + B^2 = C^2$.

b) (4 pontos) Determinar se existem ou não matrizes $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ que satisfazem a condição $A^4 + B^4 = C^4$.

A notação $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ significa que *A* é uma matriz 2×2 com entradas inteiras e $\det A = 1$.

PROBLEMA 7. [7 pontos]

Seja *A* um grupo aditivo abeliano sem elementos periódicos não nulos e tal que para cada número primo p vale a desigualdade $|A/pA| \le p$, onde $pA = \{pa \mid a \in A\}$, $pa = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{p \text{ vezes}}$ e $|A/pA|$ é a cardinalidade do grupo quociente A/pA (o índice do subgrupo *pA*).

Demonstre que cada subgrupo do grupo *A* de índice finito é isomorfo ao próprio grupo *A*.