XIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
NOVEMBRO DE 2010

PROBLEMA 1. [4 pontos]
Seja $f : S \to \mathbb{R}$ a função do conjunto de todos os triângulos retângulos no conjunto dos números reais, definida como $f(\Delta ABC) = \frac{h}{r}$, onde h é a altura relativa à hipotenusa e r é o raio do círculo inscrito. Encontrar a imagem, $Im(f)$, desta função.

PROBLEMA 2. [5 pontos]
Calcule a série

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sen^3 3^k}{3^k}$$

PROBLEMA 3. [6 pontos]
Um estudante soma as frações racionais de forma incorreta da seguinte maneira:

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y}, \quad (*)$$

porém às vezes obtém resultados corretos. Para uma fração dada $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0,$ encontrar todas as frações $\frac{x}{y}, x, y \in \mathbb{Z}, y > 0,$ tais que o resultado obtido por (*) seja correto.

PROBLEMA 4. [6 pontos]
Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ um polinômio mônico de grau $n > 2$ com coeficientes reais e todas suas raízes reais e diferentes de zero. Demonstrar que para todo $k = 0,1,2,...,n-2,$ ao menos um dos coeficientes a_k, a_{k+1} é diferente de zero.

PROBLEMA 5. [6 pontos]

Sejam A,B matrizes 2010×2010 comutantes (i.e., tais que $AB = BA$) e com entradas reais, tais que $A^{2010} = B^{2010} = I$, onde I é a matriz identidade. Demonstrar que se $\text{traço}(AB) = 2010$, então $\text{traço}(A) = \text{traço}(B)$.

PROBLEMA 6. [7 pontos]

Demonstrar que, para cada número inteiro $a > 1$, os divisores primos do número $5a^4 - 5a^2 + 1$ são da forma $20k \pm 1, k \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 7. [7 pontos]

a) (3 pontos) Demonstrar que para quaisquer números inteiros positivos $m \le l$ dados, existem um número inteiro positivo n e números inteiros $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n$ tais que a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^i = \sum_{k=1}^{n} y_k^i$$

se verifica para cada $i = 1,2,...,m-1,m+1,...,l$, porém não vale para $i = m$.

b) (4 pontos) Demonstrar que existe uma solução do item a) com todos os números $x_1,...,x_n, y_1,...,y_n$ distintos.