



XVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária 2014

1. **(3 pontos)** Sejam n e k inteiros positivos tais que $k \leq n$. De quantas formas podem ser escolhidos k intervalos de inteiros no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ de modo que a interseção de quaisquer dois deles seja vazia?

Nota: Um *intervalo de inteiros* é um conjunto de um ou mais inteiros consecutivos.

2. **(4 pontos)** Seja n um inteiro positivo e seja C um disco fechado em \mathbb{R}^2 de área maior que n . Prove que existe uma traslação de C que contém pelo menos $n + 1$ pontos (a, b) com coordenadas $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. **(4 pontos)** São escritas todas as frações $\frac{p}{q}$ com $0 \leq p \leq q$ e $q > 0$ em uma sequência da seguinte forma:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$$

Em torno de cada fração $\frac{p}{q}$ construímos um intervalo aberto de comprimento $2^{-(k(p,q)+1)}$ centrado em $\frac{p}{q}$, onde $k(p, q)$ é a posição que corresponde à fração $\frac{p}{q}$ na sequência. Prove que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ não pertence à união dos intervalos.

4. **(5 pontos)** Seja n um inteiro maior ou igual a 3. Tomemos os números complexos $a_k = k + i\sqrt{k^2 - 1}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Seja $p(x)$ o polinômio $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$. Prove que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{p'(x)} dx = 0.$$

5. **(5 pontos)** Prove que existe uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável com derivadas contínuas no domínio $[0, 1]$ tal que para qualquer função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e qualquer $\epsilon > 0$ existem um número N e números reais a_0, a_1, \dots, a_N tais que

$$\int_0^1 \left(g(x) - \sum_{i=0}^N a_i f^{(i)}(x) \right)^2 dx < \epsilon.$$

Nota: Aqui $f^{(i)}$ denota a i -ésima derivada de f se $i > 0$ e $f^{(0)} = f$.

6. **(6 pontos)** Sejam a, b, c números reais positivos distintos. Definimos $L(a, b, c)$ como

$$\frac{2a}{(\log a - \log b)(\log a - \log c)} + \frac{2b}{(\log b - \log c)(\log b - \log a)} + \frac{2c}{(\log c - \log a)(\log c - \log b)}.$$

Prove que

$$\sqrt[3]{abc} \leq L(a, b, c) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Nota: $L(a, b, c)$ é conhecida como a *média logarítmica* dos números a, b, c .

7. **(7 pontos)** Seja q uma potência de um primo ímpar p . Seja \mathbb{F}_q o corpo finito com q elementos e $GL_2(q)$ o conjunto das matrizes 2×2 invertíveis com entradas em \mathbb{F}_q . Se $M \in GL_2(q)$, definimos a *ordem* de M como o menor inteiro positivo k tal que $M^k = I$, a matriz identidade. Prove que

- (a) Se $\det(M) = 1$, então a ordem de M divide $q - 1$, $q + 1$ ou $2p$.
- (b) Se t é um inteiro positivo que divide $q - 1$, $q + 1$ ou $2p$, então existe $M \in GL_2(q)$ tal que $\det(M) = 1$ e a ordem de M é t .