XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária 2015

1. **(3 pontos)** Sejam a e b números reais tais que $a < b$ e $ab > 0$. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que existe um número real x em $[a, b]$ tal que $xf(x) = ab$.

2. **(4 pontos)** Demonstre que 65 é o número mínimo de retas com as quais se pode construir um polígono (não convexo) de 2015 lados tal que estas retas contêm todos os lados do polígono.

3. **(4 pontos)** Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como

$$M(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n) = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1).$$

Determine todos os números $n \in \mathbb{N}$ para os quais existe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear tal que $L^2 = M$.

4. **(5 pontos)** Seja (a_n) uma sequência crescente de inteiros positivos.

   a) Demonstre que se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é finita então existe um conjunto infinito de inteiros positivos, digamos S, de modo que a soma de qualquer quantidade finita de elementos distintos de S não é um termo da sequência (a_n).

   b) Será possível que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ divirja mas que ainda assim exista um conjunto S com as propriedades do item anterior?

5. **(5 pontos)** Demonstre que

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

6. **(7 pontos)** Encontre um inteiro positivo m tal que os números da forma $a^{2015} + b^{2015}$, divididos por m, tenham menos de $\dfrac{m}{5}$ restos diferentes.

7. **(8 pontos)** Sejam $a_1, a_2, .., a_k$ números inteiros distintos com $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$, seja g a permutação dada por:

$$g = (1, 2, ..., a_1)(a_1+1, a_1+2, ..., a_1+a_2)(a_1+a_2+1, ...a_1+a_2+a_3)...(a_1+\cdots+a_{k-1}+1, ..., n)$$

Mostre que o centralizador de g em S_n, o grupo simétrico em n letras, é um grupo abeliano.

Observação: O centralizador de g em S_n é o subgrupo das permutações em S_n que comutam com g e um grupo é abeliano se $xy = yx$ para todo x, y no grupo.