XIX Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária 2016

Problema 1. (3 pontos). Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente crescente. Prove que as duas condições seguintes são equivalentes:

(i) Se $f(x) \in \mathbb{Z}$, então $x \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\lfloor f(x) \rfloor = f(\lfloor x \rfloor)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Problema 2. (4 pontos). Sejam $a_1 < a_2 < ... < a_n$ inteiros positivos ímpares.
Prove que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_1, a_2, ..., a_n]} < \frac{3}{2}.$$

Aqui $[a_1, a_2, ..., a_i]$ é o mínimo múltiplo comum dos números $a_1, a_2, ..., a_i$.

Problema 3. (4 pontos). Os números reais positivos a, b e c satisfazem a condição de que $ab + ac + bc \leq 3abc$. Prove que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c.$$

Problema 4. (5 pontos). Seja G um grupo onde todo elemento $x \in G$, com $x \neq 1$, tem ordem p. Mostre que se em qualquer subconjunto A de G com $p^2 - 1$ elementos, há p deles que comutam dois a dois, então G é um grupo Abeliano.

Problema 5. (5 pontos). Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem:

$$f(x + yf(x)) + f(y - f(x)) = 2xf(y), \text{ para todos os números reais } x, y.$$

Problema 6. (7 pontos). Para um inteiro positivo n, uma arrumação n-bicolorida consiste de 3 triângulos vermelhos e n triângulos azuis que satisfazem as seguintes condições:

- Não existe uma reta que passe pelos três triângulos vermelhos.
- Cada triângulo vermelho e cada triângulo azul se intersectam.

Determine o menor valor de k para o qual para qualquer arrumação n-bicolorida se possam encontrar k pontos do plano que toquem todos os triângulos azuis da arrumação.

Problema 7. (7 pontos). (a) Seja K um inteiro positivo e seja $f(x)$ um polinômio real não nulo que não tem raízes complexas no domínio definido pela condição angular $|arg\, z| < \frac{\pi}{2K}$. Prove que existe um polinômio real diferente de zero $g(x)$ tal que os coeficientes de $g(x)$ sejam todos não negativos, $f(x)$ divide $g(x)$ e $grau\ g \leq K \cdot grau\ f$.
(b) Construa para todo inteiro positivo K um polinômio real não nulo $f(x)$ que não tenha raízes complexas no domínio definido pela condição angular $|arg\, z| < \frac{\pi}{2K}$ e que satisfaça a propriedade de que todo polinômio não nulo $g(x)$ divisível por $f(x)$, que tenha somente coeficientes não negativos, também satisfaça $grau\ g \geq K \cdot grau\ f$.