XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Cada problema vale 10 pontos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345, para que o número restante seja o maior possível.

PROBLEMA 2

Sabe-se que três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem cada um exatamente quatro domingos.

a) Estes meses podem ser janeiro, fevereiro e março?

b) Podem ser agosto, setembro e outubro?

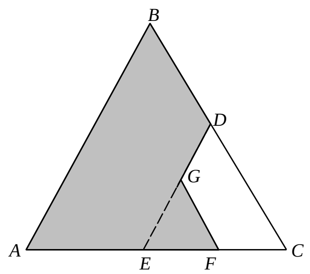
PROBLEMA 3

Na figura, os triângulos *ABC* e *EGF* são equiláteros. O perímetro do triângulo *ABC* é 132cm e, além disso,

$$AE = EC$$
$$BD = DC$$
$$EF = FC$$
$$DG = GE$$

a) Qual o perímetro da área sombreada?

b) Que fração da área do triângulo *ABC* representa a área sombreada?



PROBLEMA 4

Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$127,00 pudesse ser paga entregando-se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

PROBLEMA 5

Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:

O elevador *A* pára em todos os andares.

O elevador *B* pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, …

O elevador *C* pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, …

O elevador *D* pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, …

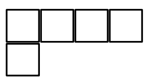
O elevador *E* pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, …

a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.

b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

PROBLEMA 6

Encontre o menor tabuleiro quadrado que pode ser ladrilhado usando peças com o seguinte formato:



Obs: Ladrilhado significa completamente coberto, sem superposição de peças, e de modo que nenhum ponto fora do tabuleiro seja coberto por alguma peça.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE – NÍVEL 1

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

O maior número restante é 553451234512345. Para ver isto, podemos supor que os cortes são feitos da esquerda para a direita. Se deixarmos de cortar todos os quatro primeiros algarismos, o número que resta começará por 1, 2, 3 ou 4. Logo, menor que o número acima. Feito isto, se deixarmos de cortar a segunda seqüência 1234, o número que resta terá na primeira ou segunda casa, da esquerda para a direita, 1, 2, 3 ou 4. Ainda menor que o número acima. Os dois primeiros 5 devem permanecer, pois retirando-se um deles, completamos 9 retiradas e aí algum algarismo da terceira seqüência 1234 aparecerá na 1^a ou na 2^a casa. Finalmente devemos cortar a seqüência 12, que ocupa a 11^a e 12^a posição.

SOLUÇÃO PROBLEMA 2

Se o dia primeiro de janeiro for Segunda-feira, e o ano não for bissexto, então os meses de janeiro, fevereiro e março terão 4 domingos cada.

SOLUÇÃO PROBLEMA 3 (Solução resumida)

a) $Perímetro = 2\cdot(44)+3\cdot = 121.$ b) $S' = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}.\frac{1}{4}S = \frac{13}{16}S$

SOLUÇÃO PROBLEMA 4

Basta distribuir as moedas em 7 caixas contendo respectivamente 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 moedas. Para outros pagamentos Pedro pode fazer 3 = 1 + 2, 5 = 1 + 4, 6 = 2 + 4, 7 = 1 + 2 + 4. Assim já pode pagar as quantias de 1 a 7 reais com o conteúdo das caixas. Somando-se a parcela de 8 a estas somas chega-se nas somas de 9 até 15. Somando-se a parcela de 16 às 15 somas assim formadas obtém-se somas de 17 a 31. A estas acrescenta-se a parcela de 32. E finalmente a parcela de 64, obtendo-se assim todas as somas de 1 a 127 = 1+ 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

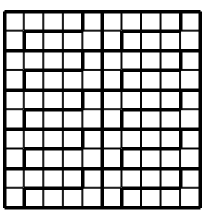
a) O elevador *B* pára nos múltiplos de 5.
O elevador *C* pára nos múltiplos de 7.
O elevador *D* pára nos múltiplos de 17.
O elevador *E* pára nos múltiplos de 23.

Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de $5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13685$ e o prédio só tem 1000 andares.

b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar *A*, que pára em todos, e três dos restantes.
B, *C* e *D* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$
B, *C* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$
B, *D* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1955$
C, *D* e *E* param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2737$
Logo, os andares onde param 4 elevadores são o 595 e o 805.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

O menor tabuleiro é do tipo 10×10 coberto com 20 peças, como mostrado, por exemplo, pela figura abaixo, à esquerda.



Com efeito, o número de casas do tabuleiro é um quadrado perfeito múltiplo de 5. Logo é 25, 100, 225 ou ... etc. Mas um tabuleiro 5×5 não pode ser coberto com peças deste tipo, pois ao tentarmos completar uma lateral do tabuleiro, seremos conduzidos a uma das duas figuras à direita, as quais não se deixam completar pelas peças para formar todo o tabuleiro.