

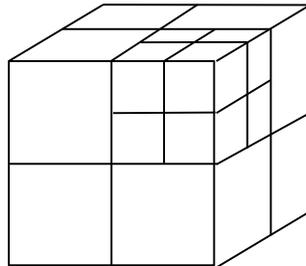
**XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**Terceira Fase – Nível 1**

**Instruções:**

- ◆ A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- ◆ Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.
- ◆ Você pode solicitar papel para rascunho.
- ◆ Todas as suas soluções devem ser justificadas.

**PROBLEMA 1**

Diga como dividir um cubo em 1999 cubinhos. A figura mostra uma maneira de dividir um cubo em 15 cubinhos.



**PROBLEMA 2**

Emanuela, Marta e Isabel são três nadadoras que gostam de competir e por isso resolveram organizar um desafio de natação entre elas. Ficou combinado o total de pontos para o primeiro, o segundo e o terceiro lugares em cada prova. A pontuação para primeiro lugar é maior que a para o segundo e esta é maior que a pontuação para o terceiro. As pontuações são números inteiros positivos. O desafio consistiu de várias provas e ao final observou-se que Emanuela fez 20 pontos, Marta 9 pontos e Isabel 10. A primeira prova foi vencida por Isabel.

- (a) Quantas provas foram disputadas?
- (b) Determine o total de pontos para o primeiro, segundo e terceiro lugares.

**PROBLEMA 3**

Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade  $A$  para cidade  $B$ , que é a cidade do reino mais longe de  $A$ . Após um tempo, ele foi expulso da cidade  $B$  para a cidade  $C$  do reino mais longe de  $B$ . Sabe-se que a cidade  $C$  não é a mesma cidade  $A$ . Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade  $A$ ?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

**PROBLEMA 4**

Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe-se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

**XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**Soluções da Terceira Fase – Nível 1**

**PROBLEMA 1**

**SOLUÇÃO DE MARIANA DE MORAES SILVEIRA (Belo Horizonte - MG)**

O cubo deve ser dividido em 1000 cubinhos, ou seja  $10 \times 10 \times 10$ , depois, deve-se pegar um deles e dividi-lo novamente em 1000 cubinhos para que obtenhamos 1999 cubinhos. Assim teremos  $1000 - 1$  (que será dividido) + 1000 = 1999 cubinhos.

**PROBLEMA 2**

**SOLUÇÃO DE DIOGO DOS SANTOS SUYAMA (Belo Horizonte - MG)**

- a) Foram disputadas 3 provas. Como  $20 + 10 + 9 = 39$ , o número de pontos distribuídos por prova só poderia ser 3 ou 13, pois estes são os únicos divisores de 39, a não ser o mesmo e o 1. Em consequências, o número de provas também será um desses números. Porém, se forem disputadas 13 provas, só há uma maneira de se distribuir os pontos: 2 para o primeiro, 1 para o segundo e 0 para o terceiro. Entretanto, 0 não é positivo, sendo assim descartada essa hipótese.
- b) Já sabendo que são 3 provas, é impossível que a vencedora ganhe menos que 8 pontos, pois assim, Emanuela só conseguiria os 20 pontos fazendo 7, 7 e 6 pontos em cada prova. Para isso, seria preciso que a vencedora fizesse 7 pontos, a segunda colocada 6 e a última 0, mas como vimos, 0 não é positivo. É impossível, também que a vencedora faça mais de 10 pontos, pois não seria possível que a segunda fizesse mais pontos que a última, ou que esta não fizesse 0 pontos. Então, as únicas possibilidades são:  $1^a. \rightarrow 10, 2^a. \rightarrow 2, 3^a. \rightarrow 1$ ;  $1^a. \rightarrow 9, 2^a. \rightarrow 3, 3^a. \rightarrow 1$ ;  $1^a. \rightarrow 8, 2^a. \rightarrow 4, 3^a. \rightarrow 1$ ; e  $1^a. \rightarrow 8, 2^a. \rightarrow 3, 3^a. \rightarrow 2$ . A primeira opção é incorreta, pois Isabel, que venceu uma das provas, não poderia ter feito pontos nas outras. A segunda opção também não é correta, pois Isabel teria que marcar apenas um ponto em duas provas. A última opção é incorreta também, pois Isabel teria que marcar 2 pontos em duas provas. Terceira opção:  $1^a. \rightarrow 8, 2^a. \rightarrow 4, 3^a. \rightarrow 1$  é a correta. Veja o quadro abaixo:

	1ª. Prova	2ª. Prova	3ª. Prova	Total
<b>Emanuela</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>20</b>
<b>Marta</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>9</b>
<b>Isabel</b>	<b>8</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>10</b>

**PROBLEMA 3**

Veja solução do problema 2 do nível 2.

**PROBLEMA 4**

Veja solução do problema 3 do nível 2