The 10^{th} Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 1: Sexta-Feira, 23 de Fevereiro de 2018, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e seja P um ponto sobre o lado AB. A diagonal AC encontra o segmento DP em Q. A reta que passa por P paralela à CD encontra o prolongamento do lado CB por B em K. A reta que passa por Q paralela à BD encontra o prolongamento do lado CB por B em L. Prove que os circuncírculos dos triângulos BKP e CLQ são tangentes.

Problema 2. Determine se existem polinômios não constantes $P(x)$ e $Q(x)$ com coeficientes reais satisfazendo

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}.$$

Problema 3. Ana e Beto jogam sobre as arestas unitárias do reticulado quadriculado infinito, realizando jogadas alternadamente. Ana realiza a primeira jogada. Uma jogada consiste em orientar uma aresta unitária qualquer do reticulado que ainda não tenha sido orientada. Se em algum momento do jogo, algumas arestas orientadas formarem um ciclo orientado, Beto vence. Existe uma estratégia que garanta a vitória para Beto?

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Duração: $4\frac{1}{2}$ horas.

The 10$^{\text{th}}$ Romanian Master of Mathematics Competition

Dia 2: Sábado, 24 de Fevereiro de 2018, Bucareste

Language: Portuguese

Problema 4. Sejam a, b, c, d inteiros positivos tais que $ad \neq bc$ e $\operatorname{mdc}(a, b, c, d) = 1$. Seja S o conjunto de todos os possíveis valores de $\operatorname{mdc}(an + b, cn + d)$, quando n varia sobre os inteiros positivos. Mostre que S é o conjunto de todos os divisores positivos de algum inteiro positivo.

Problema 5. Seja n um inteiro positivo e fixe $2n$ pontos distintos em uma circunferência. Determine o número de maneiras de conectar os pontos com n flechas (isto é, segmentos de reta orientados) tais que todas as seguintes condições sejam satisfeitas:

- cada um dos $2n$ pontos é uma das extremidades de alguma flecha;
- quaisquer duas flechas não se intersectam; e
- não existem duas flechas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tais que A, B, C e D apareçam nesta ordem no sentido horário ao redor da cincunferência (não necessariamente consecutivamente).

Problema 6. São dadas uma circunferência Γ, uma reta ℓ tangente à Γ, e uma outra circunferência Ω disjunta de ℓ, tais que Γ e Ω estão em lados opostos de ℓ. As retas tangentes à Γ a partir de um ponto variável X sobre Ω encontram ℓ em Y e Z. Prove que, quando X varia sobre Ω, o circuncírculo de XYZ tangencia duas circunferências fixas.

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Duração: $4\frac{1}{2}$ horas.