

XXIV^a OLIMPÍADA de MAYO
Primeiro Nível
Maio de 2018



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não pode usar calculadora; não pode consultar livros nem anotações.

Justifique cada uma de suas respostas.

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até o dia 08 de junho.

PROBLEMA 1

Juan faz uma lista de 2018 números. O primeiro é o 1. Então, cada número é obtido adicionando um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 ao anterior.

Sabendo que nenhum dos números da lista termina em 0, qual é o maior valor que o último número da lista pode ter?

PROBLEMA 2

São feitas mil divisões: divide-se 2018 por cada um dos números inteiros de 1 até 1000. Obtém-se assim, mil quocientes inteiros com seus respectivos restos. Qual desses mil restos é o maior?

PROBLEMA 3

Seja $ABCDEFGHIJ$ um polígono regular de 10 lados que tem todos seus vértices em uma circunferência de centro O e raio 5. As diagonais AD e BE se cortam em P e as diagonais AH e BI se cortam em Q . Calcule a medida do segmento PQ .

PROBLEMA 4

Ana deve escrever 7 inteiros positivos, não necessariamente distintos, ao redor de uma circunferência de modo que se cumpram as seguintes condições:

- A soma dos sete números é igual a 36.
- Se dois números são vizinhos, a diferença entre o maior e o menor é igual a 2 ou 3.

Encontrar o valor máximo do maior dos números que Ana pode escrever.

PROBLEMA 5

Em cada casinha de um tabuleiro 5×5 escreve-se um dos números 2, 3, 4 ou 5 de modo que a soma de todos os números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal, sempre seja par.

De quantos modos podemos preencher o tabuleiro?

Esclarecimento. Um tabuleiro 5×5 possui exatamente 18 diagonais de tamanhos distintos. Em particular, as quinas são diagonais de tamanho 1.

XXIV^a OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nível
Maio de 2018



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não pode usar calculadora; não pode consultar livros nem anotações.

Justifique cada uma de suas respostas.

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até o dia 08 de junho.

PROBLEMA 1

Considere um número inteiro de 4 dígitos que é um quadrado perfeito. Constrói-se outro número somando 1 ao seu dígito das unidades, subtraindo 1 do dígito das dezenas, somando 1 ao dígito das centenas e subtraindo 1 do dígito das unidades de milhar. Se o número que se obtém também é um quadrado perfeito, encontrar o número original. É único?

PROBLEMA 2

Em um tabuleiro 4×4 estão escritos os números de 1 a 16, um em cada casa. Andrés e Pablo escolhem quatro números cada um. Andrés escolhe o maior de cada linha e Pablo, o maior de cada coluna. Um mesmo número pode ser escolhido por ambos. Então, se eliminam do tabuleiro todos os números escolhidos. Qual é o maior valor que pode ter a soma dos números que sobram no tabuleiro?

PROBLEMA 3

Os 2018 moradores de uma cidade estão divididos em duas classes: cavalheiros, que sempre dizem a verdade, e mentirosos, que sempre mentem. Certo dia todos os moradores sentaram-se ao redor de uma circunferência e cada um deles falou em voz alta “*Meus dois vizinhos, o da esquerda e o da direita, são mentirosos*”. Logo após, um dos moradores abandonou a cidade. Os 2017 que permaneceram sentaram-se novamente em uma circunferência (não necessariamente na mesma ordem que antes) e cada um deles falou em voz alta “*Nenhum de meus vizinhos, o da esquerda e o da direita, é da mesma classe que eu*”. Determinar, se for possível, de que classe é o morador que abandonou a cidade: cavalheiro ou mentiroso.

PROBLEMA 4

Num paralelogramo $ABCD$, seja M o ponto do lado BC tal que $MC = 2BM$ e seja N o ponto do lado CD tal que $NC = 2DN$. Se a distância do ponto B à reta AM é 3, calcular a distância do ponto N à reta AM .

PROBLEMA 5

Cada ponto de uma circunferência está colorido com uma de 10 cores. Determinar se é verdade que para qualquer coloração existem 4 pontos da mesma cor que são vértices de quadrilátero com dois lados paralelos (um trapézio isósceles ou um retângulo).