5^{th} Olimpíada Iraniana de Geometria

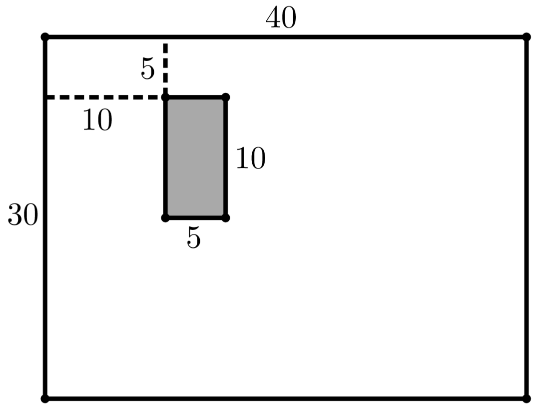
Nível Iniciante

Quinta-feira, 6 de Setembro de 2018

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que eles sejam postados no site oficial da IGO: http://igo-official.ir .

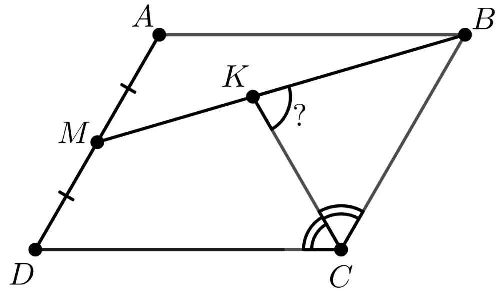
---

1 Como na figura abaixo, temos um papel de dimensões 40×30 com um retângulo destacado 10×5 dentro dele. Queremos cortar tal retângulo do papel utilizando exatamente quatro cortes retos. Cada corte reto é um segmento de reta que divide o papel em duas partes, e nós continuamos cortando a parte que contém o retângulo destacado. O objetivo é minimizar a medida total dos tamanhos dos cortes retos. Como conseguir o objetivo? Qual a medida mínima do total dos tamanhos dos cortes? Mostre os cortes corretos e escreva sua resposta final. Não é necessário provar a resposta.



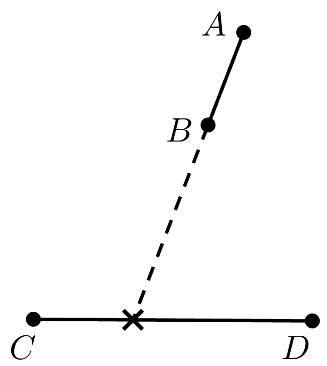
2 O hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está contido no interior do hexágono convexo $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ de modo que $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$,..., $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Prove que as áreas dos hexágonos *simples* $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ e $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ são iguais. (Um hexágono *simples* é um hexágono que não intersecta ele mesmo.)

3 Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo. Sabemos que $\angle D = 60^\circ$, $AD = 2$ e $AB = \sqrt{3}+1$. O ponto M é o ponto médio de AD. O segmento CK é a bissetriz de C. Encontre o ângulo K.

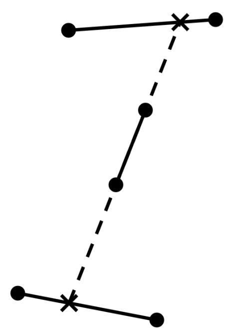


4 É dado um círculo ω no plano. Dois círculos com centros O_1, O_2 estão contidos em ω e são tangentes ao mesmo. A corda AB de ω é tangente a esses dois círculos de modo que esses dois círculos estão em lados opostos dessa corda. Prove que $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90°$.

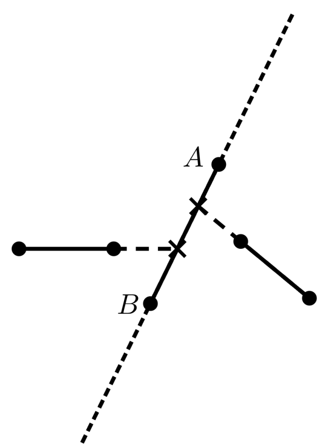
5 Temos alguns segmentos no plano tais que não existem dois segmentos que se intersectam(nem mesmo nos extremos). Dizemos que um segmento AB **quebra** o segmento CD se o prolongamento de AB corta CD em algum ponto entre C e D.



(a) É possível que cada segmento, após ser estendido de ambos os lados, quebre exatamente um outro segmento em cada lado?



(b) Um segmento é chamado de **cercado** se, em ambos os lados, há exatamente um segmento que o quebra. (*ex:* o segmento AB na figura.) É possível que todos os segmentos sejam cercados?



Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 pontos.

5ª OLIMPÍADA IRANIANA DE GEOMETRIA

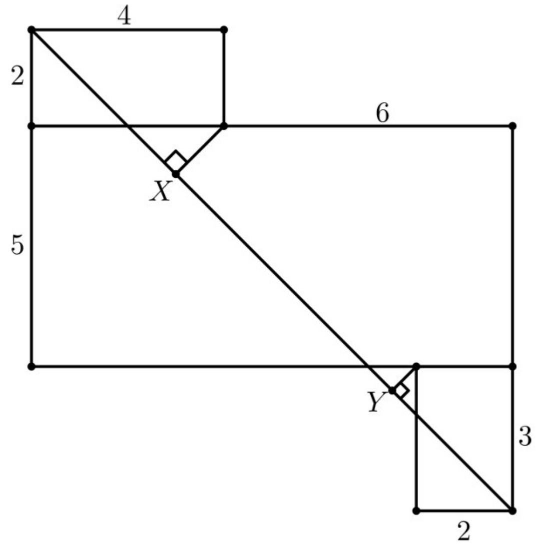
Nível Intermediário

Quinta-feira, 6 de setembro de 2018

Os problemas devem ser mantidos em sigilo até serem postados no website oficial da IGO: http://igo-official.ir

---

01. Existem três retângulos na figura seguinte. Os comprimentos de alguns dos segmentos são mostrados. Ache o comprimento do segmento XY.



02. Em um quadrilátero convexo $ABCD$, os diâmetros AC e BD se encontram no ponto P. Sabe-se que $\angle DAC = 90^o$ e que $2\angle ADB = \angle ACB$. Se $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^o$, prove que $2.AP = BP$.

03. Sejam ω_1 e ω_2 dois círculos com centros em O_1 e O_2, respectivamente. Estes dois círculos intersectam-se nos pontos A e B. A reta O_1B intersecta ω_2 pela segunda vez no ponto C, e a reta O_2A intersecta ω_1 pela segunda vez no ponto D. Seja X a segunda interseção de AC e ω_1. Também Y é o segundo ponto de interseção de BD e ω_2. Prove que $CX = DY$.

04. Nós temos um poliedro onde todas as suas faces são triângulos. Seja P um ponto arbitrário sobre uma das arestas deste poliedro tal que P não é o ponto médio e nem um dos extremos dessa aresta. Assuma que $P_0 = P$. Em cada passo, conecte P_i ao baricentro de uma das faces que contém este ponto. Esta reta encontra esta face novamente no ponto P_{i+1}. Continue este processo com P_{i+1} e com a outra face que contém P_{i+1}. Prove que realizando este processo continuamente, não é possível passar por todas as faces.
Obs.: O baricentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas medianas.

05. Suponha que $ABCD$ é um paralelogramo tal que $\angle DAC = 90^o$. Seja H o pé da perpendicular de A à DC, também seja P um ponto ao longo da reta AC tal que a reta PD é tangente ao circuncírculo do triângulo ABD. Prove que $\angle PBA = \angle DBH$.

Tempo: 4h e 30 min.
Cada problema vale 8 pontos.

Tempo: 4h e 30 min.
Cada problema vale 8 pontos.

5^{th} **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Avançado

Quinta-feira, 6 de Setembro de 2018

Os problemas da prova devem ser mantidos confidenciais até que eles sejam postados no site oficial da IGO: http://igo-official.ir .

---

1 Duas circunferências ω_1 e ω_2 se intersectam em A e B. Seja PQ uma reta tangente comum a estas duas circunferências com $P \in \omega_1$ e $Q \in \omega_2$. Seja X um ponto qualquer em ω_1. A reta AX intersecta ω_2 pela segunda vez em Y. Um ponto $Y' \neq Y$ em ω_2 é tal que $QY = QY'$. A reta $Y'B$ intersecta ω_1 pela segunda vez em X'. Prove que $PX = PX'$.

2 Em um triângulo acutângulo ABC, $\angle A = 45°$. Os pontos O e H são o circuncentro e ortocentro de ABC, respectivamente. Seja D o pé da altura por B. O ponto X é o ponto médio do arco AH da circunferência circunscrita ao triângulo ADH que contém D. Prove que $DX = DO$.

3 Determine todos os inteiros $n > 3$ tais que existe um n-ágono convexo no qual cada diagonal é a mediatriz de pelo menos alguma outra diagonal.

4 O quadrilátero $ABCD$ está circunscrito a uma circunferência. As diagonais AC e BD não são perpendiculares. As bissetrizes dos ângulos entre estas diagonais intersectam os segmentos AB, BC, CD e DA nos pontos K, L, M e N. Dado que $KLMN$ é inscritível, prove que $ABCD$ também é inscritível.

5 Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível. Uma circunferência passando por A e B é tangente ao segmento CD no ponto E. Uma outra circunferência passando por C e D é tangente a AB no ponto F. O ponto G é o ponto de interseção de AE e DF e o ponto H é a interseção de BE e CF. Prove que os incentros dos triângulos AGF, BHF, CHE, DGE estão sobre uma mesma circunferência.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.

Cada problema vale 8 pontos.