Primeiro dia

UAN— Universidad Antonio Nariño, Santa Marta

3 de outubro de 2018

Problema 1. Demonstre que existe uma matriz 2×2 de ordem 6, com entradas racionais, tal que a soma de todas as suas entradas seja 2018.

Obs: A ordem de uma matriz A (se existir) é o menor inteiro positivo n tal que $A^n = I$, onde I é a matriz identidade.

Problema 2. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios reais não constantes de grau no máximo n ($n > 1$). Prove que existe um polinômio $F(x, y)$ não nulo de duas variáveis com coeficientes reais, cujo grau é menor ou igual a $2n - 2$, tal que $F(p(t), q(t)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Sejam m ímpar e $\mathbb{Z}_m$ o anel dos inteiros módulo m. Definimos uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}_m$ dada por $x \sim y$ se existe um natural t tal que $y = 2^t x$. Determine todos os valores de m tais que o número de classes de equivalência seja par.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

UAN— Universidad Antonio Nariño, Santa Marta

4 de outubro de 2018

Problema 4. Sejam $\alpha < 0 < \beta$ números reais e considere o polinômio $f(x) = x(x-\alpha)(x-\beta)$. Seja S o conjunto de números reais s tais que o polinômio $f(x) - s$ tenha três raízes reais. Para $s \in S$, seja $p(s)$ o produto da menor e da maior raiz do polinômio $f(x) - s$. Determine o menor valor possível de $p(s)$ ao variar s em S e os valores de s correspondentes.

Problema 5. Considere a transformação

$$T(x, y, z) = (\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} z).$$

Determine todos os pontos $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ para os quais $T^{(n)}(x, y, z) \in [0, 1]^3$ para todo $n \geq 1$.

Obs: $T^{(n)} = \underbrace{T \circ T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ vezes}}$.

Problema 6. Seja (x_n) uma sequência de números reais no intervalo $[0, 1)$. Prove que existe uma sequência crescente $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ de inteiros positivos tal que existe o limite

$$\lim_{i,j \to \infty} x_{n_i + n_j},$$

ou seja, existe um número real L tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo N de maneira que se $i, j > N$, então $|x_{n_i+n_j} - L| < \varepsilon$.

Observe que, na questão 6, i é diferente de j.

Cada problema vale 10 pontos.
Tempo máximo: 4h 30m.