XXXIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

ESPAÑA ~ PORTUGAL
La Rábida Monte Gordo

Terça-feira, 25 de setembro de 2018

Primeiro dia

1. Para cada número natural $n \geq 2$, encontrar as soluções inteiras do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018} \\ x_2 = (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018} \\ \vdots \\ x_n = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018} \end{cases}$$

2. Seja ABC um triângulo tal que $\angle BAC = 90°$ e $BA = CA$. Seja M o ponto médio de BC. Escolhe-se um ponto $D \neq A$ na semicircunferência de diâmetro BC que contém A. A circunferência circunscrita ao triângulo DAM interseta as retas DB e DC nos pontos E e F, respetivamente. Demonstrar que $BE = CF$.

3. Num plano temos n retas sem que haja duas paralelas, nem duas perpendiculares, nem três concorrentes. Escolhe-se um sistema de eixos cartesianos com uma das n retas como eixo das abcissas. Um ponto P situa-se na origem das coordenadas do sistema escolhido e começa a mover-se com velocidade constante pela parte positiva do eixo das abcissas. Cada vez que P chega à interseção de duas retas, segue pela reta recém alcançada no sentido que permite que o valor da abcissa de P seja sempre crescente. Demonstrar que se pode escolher o sistema de eixos cartesianos de modo que P passe por pontos das n retas.

   Nota: O eixo das abcissas de um sistema de coordenadas do plano é o eixo da primeira coordenada ou eixo dos x.

Duração: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

XXXIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
ESPAÑA ~ PORTUGAL
La Rábida Monte Gordo

Quarta-feira, 26 de setembro de 2018

Segundo dia

4. Um conjunto de inteiros positivos X diz-se *ibérico* se X é um subconjunto de $\{2, 3, 4, \ldots, 2018\}$ e sempre que m e n pertençam a X, então $\mathrm{mdc}(m, n)$ também pertence a X. Um conjunto ibérico diz-se *olímpico* se não está contido em nenhum outro conjunto ibérico. Encontrar todos os conjuntos ibéricos olímpicos que contêm o número 33.

5. Seja n um inteiro positivo. Para uma permutação $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dos números $1, 2, \ldots, n$, definimos

$$b_k = \min_{1\leq i\leq k} a_i + \max_{1\leq j\leq k} a_j$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dizemos que a permutação $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é *guadiana* se a sucessão $b_1, b_2, \ldots, b_n$ não tem dois elementos consecutivos iguais. Quantas permutações guadianas existem?

6. Seja ABC um triângulo acutângulo com $AC > AB > BC$. As mediatrizes de AC e AB intersetam a reta BC em D e E, respetivamente. Sejam P e Q pontos distintos de A sobre as retas AC e AB, respetivamente, tais que $AB = BP$ e $AC = CQ$, e seja K a interseção das retas EP e DQ. Seja M o ponto médio de BC. Demonstrar que $\angle DKA = \angle EKM$.

Duração: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos