IV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

CIMAT, Guanajuato, México del 1 al 5 de octubre de 2012

Primeiro dia

Guanajuato, Gto., México

2 de outubro de 2012

Problema 1. Para cada inteiro positivo n se define A_n como a matriz de tamanho $n \times n$ tal que sua entrada a_{ij} é igual a $\binom{i+j-2}{j-1}$ para todos os $1 \leq i, j \leq n$. Calcular o valor do determinante de A_n.

Problema 2. Um conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ *é simpático* se sempre que $x, y \in A$ com $x \leq y$ temos também que $2y - x \in A$. Demonstrar que se A é simpático, $0, a, b \in A$ com $0 < a < b$ e $d = \text{mcd}(a, b)$ então

$$a + b - 3d,\ a + b - 2d \in A.$$

Problema 3. Sejam a, b, c os lados de um triângulo. Demonstrar que

$$\sqrt{\frac{(3a+b)(3b+a)}{(2a+c)(2b+c)}} + \sqrt{\frac{(3b+c)(3c+b)}{(2b+a)(2c+a)}} + \sqrt{\frac{(3c+a)(3a+c)}{(2c+b)(2a+b)}} \geq 4.$$

Cada problema vale 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.

IV Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

CIMAT, Guanajuato, México del 1 al 5 de octubre de 2012

Segundo dia

Guanajuato, Gto., México

3 de outubro de 2012

Problema 4. Seja $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Encontrar

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Problema 5. Seja $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Uma *função de direção* para D é uma função $f : D \times D \to \{0, 1\}$. Um real $r \in [0, 1]$ é *compatível com* f se podemos escrevê-lo na forma

$$r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j}$$

com $d_j \in D$ e $f(d_j, d_{j+1}) = 1$ para todo inteiro positivo j.

Determinar o menor inteiro k tal que para toda função de direção f, se há k reais compatíveis com f então há infinitos reais compatíveis com f.

Problema 6. Sejam $n \geq 2$ e $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstrar que se existe um inteiro positivo k tal que $(x-1)^{k+1}$ divide $p(x)$ então

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| > 1 + \frac{2k^2}{n}.$$

Cada problema vale 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.