Primeiro dia

Armenia, Colômbia

17 de outubro de 2013

Problema 1. Dados dois números naturais m e n denotamos por $\overline{m,n}$ ao número decimal que tem o m antes da vírgula e o n depois da vírgula.

a) Demonstrar que existem infinitos números naturais k tais que para cada um deles a equação $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ **não tem** solução.

b) Demonstrar que existem infinitos números naturais k tais que para cada um deles a equação $\overline{m,n} \times \overline{n,m} = k$ **tem** solução.

Problema 2. Consideremos um polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grau n sem raízes reais. Demonstrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p'(x))^2}{(p(x))^2 + (p'(x))^2}\, dx$$

converge, e é menor ou igual a $n^{3/2}\pi$.

Problema 3. Dado um conjunto de meninos e meninas, um par (A, B) de pessoas será chamado *amigável* se A e B são amigos. A relação de amizade é simétrica. Um conjunto de pessoas é *afetuoso* se satisfazem as seguintes condições:

i) O conjunto tem o mesmo número de meninos e meninas.

ii) Para cada quatro pessoas distintas A, B, C, D, se os pares (A, B), (B, C), (C, D) e (D, A) são todos amigáveis, então pelo menos um dos pares (A, C) e (B, D) é também amigável.

iii) Pelo menos $\frac{1}{2013}$ de todos os pares menino–menina são amigáveis.

Seja m um inteiro positivo. Demonstrar que existe um inteiro $N(m)$ tal que se um conjunto afetuoso tem $N(m)$ pessoas ou mais, então existem m meninos que são todos amigos entre si ou m meninas que são todas amigas entre si.

Cada problema vale no máximo 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

Armenia, Colômbia

18 de outubro de 2013

Problema 4. Sejam $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ números reais positivos e $F, G : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ duas funções diferenciáveis e positivas que satisfazem as identidades:

$$\frac{x}{F} = 1 + a_1 x + b_1 y + c_1 G$$
$$\frac{y}{G} = 1 + a_2 x + b_2 y + c_2 F.$$

Demonstrar que se $0 < x_1 \leq x_2$ e $0 < y_2 \leq y_1$, então $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ e $G(x_1, y_1) \geq G(x_2, y_2)$.

Problema 5. Sejam A e B matrizes da ordem $n \times n$ com entradas complexas. Demonstrar que existe uma matriz T, e uma matriz invertível S tal que

$$B = S(A + T)S^{-1} - T$$

se e somente se $tr(A) = tr(B)$, onde tr denota o traço de uma matriz.

Problema 6. Seja (X, d) um espaço métrico com $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Suponhamos que X é conexo e compacto. Demonstrar que existe um $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisfaz a seguinte propriedade: para todo inteiro $n > 0$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$, existe $x \in X$ tal que a média das distâncias de $x_1, \ldots, x_n$ a x é α, ou seja:

$$\frac{d(x, x_1) + d(x, x_2) + \cdots + d(x, x_n)}{n} = \alpha.$$

Cada problema vale no máximo 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.