Primeiro dia

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Equador

17 de novembro de 2017

Problema 1. Determine todos os números complexos $w = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tais que existe um polinômio $p(z)$ com coeficientes reais positivos que satisfaz $p(w) = 0$.

Problema 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 0$ e $|f'(x)| \leq |f(x) \cdot \log |f(x)||$ para cada $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $0 < |f(x)| < 1/2$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Sejam G um grupo abeliano finito e $f : \mathbb{Z}^+ \to G$ uma função completamente multiplicativa (ou seja, $f(mn) = f(m)f(n)$ para quaisquer inteiros positivos m, n). Prove que existem infinitos inteiros positivos k tais que $f(k) = f(k + 1)$.

Cada problema vale 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.

IX Competencia IBEROAMERICANA Interuniversitaria de Matemáticas
Ecuador - 2017

Segundo dia

USFQ — Universidad San Francisco de Quito, Equador

18 de novembro de 2017

Problema 4.

Sejam m, n inteiros positivos e $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ números reais positivos tais que, para todo inteiro positivo k, temos

$$\left|(a_1^k + \ldots + a_m^k) - (b_1^k + \ldots + b_n^k)\right| \leq Ck^N,$$

para certos C e N fixos. Prove que existem $l \leq m, n$ e permutações σ de $\{1, \ldots, m\}$ e τ de $\{1, \ldots, n\}$, tais que

1. $a_{\sigma(i)} = b_{\tau(i)}$ para $1 \leq i \leq l$,
2. $a_{\sigma(i)}, b_{\tau(i)} \leq 1$ para $i > l$.

Problema 5.

Seja S um conjunto de inteiros. Dado um real positivo r, dizemos que S é um conjunto r-*decente*, se para qualquer par m, n de inteiros distintos e maiores que um que satisfaçam $\left|\frac{m-n}{m+n}\right| < r$, existe $a \in S$ e $k \geq 1$ tais que a^k divide m mas não divide n, ou a^k divide n mas não divide m.

1. Prove que, para qualquer $r > 0$, todos os conjuntos r-decentes possuem infinitos elementos primos.
2. Para cada $r > 0$, determine a maior cardinalidade possível de $\mathcal{P} \setminus S$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os primos e $S \subset \mathcal{P}$ é um conjunto r-decente.

Problema 6.

Seja G um grafo simples, conexo e finito. Um caçador e um coelho invisível jogam no grafo G. O coelho está inicialmente em um vértice w_0. Na k-ésima jogada (para $k \geq 0$), o caçador escolhe livremente um vértice v_k. Se $v_k = w_k$, o coelho é capturado e o jogo termina. Caso contrário, o coelho se move invisivelmente por uma aresta de w_k até w_{k+1} (w_k y w_{k+1} são adjacentes e, portanto, distintos) e o jogo continua. O caçador conhece estas regras e conhece o grafo G. Depois da k-ésima jogada, ele sabe se $w_k \neq v_k$, mas não recebe nenhuma outra informação.

Caracterize os grafos G para os quais o caçador tem uma estratégia que garanta que ele capture o coelho em no máximo N jogadas para algum inteiro positivo N. Aqui N deve depender apenas de G e a estratégia deve funcionar independentemente da posição inicial e da trajetória do coelho.

Nota: Um grafo é *simples* se suas arestas não são direcionadas, toda aresta liga dois vértices distintos e entre dois vértices há no máximo uma aresta. Um grafo simples é *finito* se tem um número finito de vértices. Um grafo simples é *conexo* se entre quaisquer dois vértices há um caminho (formado por arestas) ligando os dois vértices.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.