

XXV<sup>ª</sup> OLIMPIÁDA de MAIO  
Primeiro Nível  
Maio de 2019



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não pode usar calculadora; não pode consultar livros nem apontamentos.

Justifique cada uma de suas respostas.

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até o dia 25 de maio.

### PROBLEMA 1

Encontrar todos os números de dois dígitos  $\overline{ab}$  que elevados ao quadrado dão um resultado onde os dois últimos dígitos são  $\overline{ab}$ .

### PROBLEMA 2

Em um torneio de xadrez participaram mais de cinco competidores. Cada competidor jogou exatamente uma vez contra cada um dos outros competidores. Cinco dos competidores perderam cada um exatamente dois jogos. Todos os restantes competidores ganharam, cada um, exatamente três jogos. Não houve empates no torneio. Determinar quantos competidores participaram do torneio e mostrar um torneio que verifique todas as condições.

### PROBLEMA 3

Gustavo tem que fazer uma lista de 250 números inteiros positivos, não necessariamente distintos, tal que cada número seja igual à quantidade de números da lista que são distintos dele. Por exemplo, se 15 é um número da lista então a lista contém 15 números distintos de 15. Determinar a quantidade máxima de números distintos que pode ter a lista de Gustavo.

### PROBLEMA 4

É necessário dividir um papel quadrado em três partes, mediante dois cortes retos, de modo que ao posicionar estas partes de forma adequada, sem buracos nem sobreposições, se forme um obtusângulo. Indicar como cortar o quadrado e como montar o triângulo com as três partes.

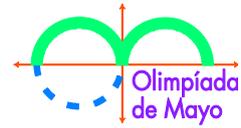
**Nota.** Um triângulo é obtuso se um de seus ângulos mede mais de  $90^\circ$ .

### PROBLEMA 5

Ana e Beto têm uma tabela com três filas e 2019 colunas. Na primeira fila estão escritos os números inteiros de 1 a 2019 inclusivé, ordenados do menor ao maior. Na segunda fila, Ana escreve esses mesmos números mas ordenados à sua escolha. Em cada casa da terceira fila se escreve a diferença entre os dois números já escritos na mesma coluna (o maior menos o menor). Beto tem que pintar alguns números da terceira fila de maneira que a soma dos números pintados seja igual à soma dos números dessa fila que ficaram sem pintar. Pode Ana completar a segunda fila de maneira que Beto não possa alcançar seu objetivo?



XXV<sup>a</sup> OLIMPÍADA de MAIO  
Segundo Nível  
Maio de 2019



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não pode usar calculadora; não pode consultar livros nem anotações.

Justifique cada uma das suas respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até o dia 25 de maio.

### PROBLEMA 1

Um inteiro positivo é *piola* se os 9 restos obtidos ao dividi-lo por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 são todos diferentes e distintos de zero. Existem quantos inteiros piolas entre 1 e 100000?

### PROBLEMA 2

Tem-se um tabuleiro com 2020 casinhas na linha inferior e 2019 na superior, posicionadas como mostrado na figura.



Na linha inferior são colocados os números inteiros de 1 a 2020 em alguma ordem. Em seguida em cada casinha da linha superior se escreve a multiplicação dos dois números que estão abaixo dessa casinha. Determine como os números da linha inferior devem ser colocados de modo que a soma dos números na linha superior seja a menor possível.

### PROBLEMA 3

Nos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  de um triângulo  $ABC$  são marcados os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , respectivamente, tais que  $BQ = 2QC$ ,  $CR = 2RA$  e  $\angle PRQ = 90^\circ$ . Mostre que  $\angle APR = \angle RPQ$ .

### PROBLEMA 4

Encontre o menor inteiro positivo  $N$  de dois ou mais dígitos que tem a seguinte propriedade: se inserirmos qualquer dígito não nulo  $d$  entre quaisquer dois dígitos adjacentes de  $N$  obtemos um número que é múltiplo de  $d$ .

### PROBLEMA 5

Consideramos os  $n$  vértices de um polígono regular de  $n$  lados. Sabe-se que existe um conjunto de triângulos com vértices nestes  $n$  pontos com a propriedade que para cada triângulo do conjunto pelo menos um de seus lados não é lado de nenhum outro triângulo do conjunto. Qual é a maior quantidade de triângulos que esse conjunto pode ter?