9ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Primeiro Dia: 5 de Novembro de 2019, Nova Friburgo, Brasil

Problema 1. Encontre uma maneira de se escrever todos os algarismos de 1 a 9 em sequência e sem repetição, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos da sequência sejam divisíveis por 7 ou 13.

Problema 2. Prove que para todo n inteiro não nulo, existem infinitas triplas de inteiros não nulos a, b e c que satisfazem as condições:

1. $a + b + c = n$
2. $ax^2 + bx + c = 0$ tem raízes racionais.

Problema 3. Seja ABC um triângulo com $AC \neq BC$. No triângulo ABC, sejam G seu baricentro (encontro das medianas), I seu incentro (encontro das bissetrizes internas) e O seu circuncentro (centro da circunferência que passa pelos vértices). Prove que IG é paralelo a AB se, e somente se, CI é perpendicular a IO.

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Duração: $4\frac{1}{2}$ horas.

9ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Segundo Dia: 6 de Novembro de 2019, Nova Friburgo, Brasil

Problema 4. Encontre todos os números reais a e b que satisfazem a relação:

$$2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1).$$

Problema 5. a) Mostre que existem cinco inteiros A, B, C, D e E tais que

$$2018 = A^5 + B^5 + C^5 + D^5 + E^5.$$

b) Mostre que não existem quatro inteiros A, B, C e D tais que

$$2018 = A^5 + B^5 + C^5 + D^5.$$

Problema 6. Dois jogadores Arnaldo e Betânia jogam alternadamente, com Arnaldo sendo o primeiro a jogar. Inicialmente, há duas pilhas de pedras contendo x e y pedras, respectivamente. Em cada jogada, é possível realizar uma das operaçes a seguir:

1. Escolher duas pilhas não vazias e tirar uma pedra de cada pilha.
2. Escolher uma pilha com uma quantidade ímpar de pedras, tirar uma de suas pedras e, se possível, dividir em duas pilhas com a mesma quantidade de pedras.

O jogador que não puder realizar nenhuma das operações 1. e 2. perde. Determine quem possui a estratégia vencedora em função de x e y.

Cada um dos três problemas vale 7 pontos.
Duração: $4\frac{1}{2}$ horas.