

41^a Olimpíada Brasileira de Matemática
Fase Única - Nível 2 (8^o e 9^o ano)
Primeiro Dia

► **PROBLEMA 1**

Um número de oito dígitos é dito *robusto* se cumprir ambas condições a seguir:

- (i) Nenhum dos seus algarismos é 0.
- (ii) A diferença entre dois algarismos consecutivos é 4 ou 5.

Responda às perguntas a seguir:

- (a) Quantos são os números robustos?
- (b) Um número robusto é dito *super-robusto* se todos os seus algarismos são distintos. Calcule a soma de todos os números super-robustos.

► **PROBLEMA 2**

Sejam a, b e k inteiros positivos com $k > 1$ tais que

$$\text{mmc}(a, b) + \text{mdc}(a, b) = k(a + b).$$

Prove que $a + b \geq 4k$.

► **PROBLEMA 3**

Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo Γ de centro O . Seja D o pé da altura relativa ao vértice A . Sejam E e F pontos sobre Γ tais que $AE = AD = AF$. Sejam P e Q os pontos de interseção da reta EF com os lados AB e AC , respectivamente. Seja X o segundo ponto de interseção de Γ com o círculo circunscrito ao triângulo APQ . Mostre que as retas XD e AO encontram-se em um ponto que está sobre Γ .

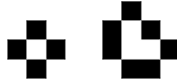
41ª Olimpíada Brasileira de Matemática
Fase Única - Nível 2 (8º e 9º ano)
Segundo Dia

► PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo acutângulo e D um ponto qualquer sobre o lado BC . Seja E o simétrico de D em relação a AC e seja F o simétrico de D em relação a AB . A reta ED intersecta a reta AB em G , enquanto a reta FD intersecta a reta AC em H . Prove que os pontos A, E, F, G e H estão sobre uma mesma circunferência.

► PROBLEMA 5

Na figura abaixo, um quadradinho branco é cercado por quatro quadradinhos pretos e três quadradinhos brancos são cercados por sete quadradinhos pretos.



Qual o número máximo de quadradinhos brancos que podem ser cercados por n quadradinhos pretos?

► PROBLEMA 6

No plano cartesiano, todos os pontos com ambas coordenadas inteiras são pintados de azul. Dois pontos azuis são ditos *mutuamente visíveis* se o segmento de reta que os conecta não possui outros pontos azuis. Prove que existe um conjunto de 2019 pontos azuis que são mutuamente visíveis dois a dois.