41ª **Olimpíada Brasileira de Matemática**
2ª **Fase - Nível Universitário**
Primeiro Dia

▸ **PROBLEMA 1**
Sejam I e 0 as matrizes quadradas identidade e nula, ambas de tamanho 2019. Existe uma matriz quadrada A com entradas racionais e tamanho 2019 tal que:

(a) $A^3 + 6A^2 - 2I = 0$?

(b) $A^4 + 6A^3 - 2I = 0$?

▸ **PROBLEMA 2**
Seja $\exp^{[0]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\exp^{[0]}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, e defina recursivamente, para cada inteiro positivo n, as funções $\exp^{[n]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\exp^{[n]}(x) = e^{\exp^{[n-1]}(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde e representa o número de Euler. Seja também $\log^{[0]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\log^{[0]}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, e defina recursivamente, para cada inteiro positivo n, as funções $\log^{[n]} : (\exp^{[n-1]}(0), +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\log^{[n]}(x) = \log(\log^{[n-1]}(x)), \quad \forall x \in (\exp^{[n-1]}(0), +\infty),$$

onde log é o logaritmo natural. Em outras palavras: $\exp^{[n]}$ representa a composição da função exponencial n vezes, e $\log^{[n]}$ representa a composição da função logaritmo n vezes, onde a composição puder ser feita.

Prove que existe uma função contínua e crescente $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\exp^{[n]}(\log^{[n]}(x)+1)} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\exp^{[n+1]}(\log^{[n]}(x)-1)} = 0. \end{cases}$$

▸ **PROBLEMA 3**
São dados reais positivos a, b, c. Prove que o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + y + z = \sqrt{c^2 + z^2} + \sqrt{c^2 + y^2} \\ x + 2y + z = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + z^2} \\ x + y + 2z = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} \end{cases}$$

possui exatamente uma solução real (x, y, z) com $x, y, z \geq 0$.

41ª Olimpíada Brasileira de Matemática
2ª Fase - Nível Universitário
Segundo Dia

▸ **PROBLEMA 4**

Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ vale que

$$f(xf(y) + f(x)) + f(y^2) = f(x) + yf(x + y).$$

▸ **PROBLEMA 5**

Sejam M, k inteiros positivos. Seja $X_{M,k}$ o conjunto dos números da forma $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ onde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são primos tais que $M \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ são inteiros maiores ou iguais a k. Prove que existem reais positivos $c(M, k)$ e $\beta(M, k)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|X_{M,k} \cap \{0, 1, \ldots, n\}|}{n^{\beta(M,k)}} = c(M, k),$$

e determine o valor de $\beta(M, k)$.

▸ **PROBLEMA 6**

Em um amigo oculto, suponha que ninguém tira a si mesmo. Dizemos que o amigo oculto tem "marmelada" se existirem duas pessoas A e B tais que A tirou B e B tirou A. Para cada inteiro positivo n, seja $f(n)$ o número de amigos ocultos com n pessoas onde não há "marmelada", i.e. $f(n)$ é igual ao número de permutações σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que:

- $\sigma(i) \neq i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$;
- não existem $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) = j$ e $\sigma(j) = i$.

Determine o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n!}.$$