

Abril 2020

Problema 1. Os inteiros positivos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ satisfazem

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Prove que pelo menos um dos números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ é divisível por 2^{2020} .

Problema 2. Encontre todas as listas $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ de números reais não negativos tais que todas as três condições a seguir são satisfeitas:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) existe uma permutação $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ de $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ tal que

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Uma permutação de uma lista é uma lista de mesmo tamanho, com as mesmas entradas, mas tal que as entradas podem estar em qualquer ordem. Por exemplo, $(2, 1, 2)$ é uma permutação de $(1, 2, 2)$, e ambas são permutações de $(2, 2, 1)$. Note que qualquer lista é permutação dela mesma.

Problema 3. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $\angle A = \angle C = \angle E$, $\angle B = \angle D = \angle F$ e as bissetrizes internas de $\angle A$, $\angle C$ e $\angle E$ são concorrentes num único ponto.

Prove que as bissetrizes internas de $\angle B$, $\angle D$ e $\angle F$ também são concorrentes num único ponto.

Note que $\angle A = \angle FAB$. Os demais ângulos internos do hexágono são definidos analogamente.

Idioma: Português

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer esta competição justa e divertida para todas, por favor não mencione ou comente os problemas na internet ou nas redes sociais até Sábado 18 de Abril, 19:00 (Horário de Brasília).

Abril 2020

Problema 4. Uma permutação dos inteiros $1, 2, \dots, m$ é chamada *fresh* se não existe inteiro positivo $k < m$ tal que os k primeiros números na permutação são $1, 2, \dots, k$ em alguma ordem. Seja f_m o número de permutações *fresh* dos inteiros $1, 2, \dots, m$.

Prove que $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ para todo $n \geq 3$.

Por exemplo, se $m = 4$, então a permutação $(3,1,4,2)$ é *fresh*, enquanto a permutação $(2,3,1,4)$ não é *fresh*.

Problema 5. Considere o triângulo ABC com $\angle BCA > 90^\circ$. O circuncírculo Γ de ABC tem raio R . Existe um ponto P no interior do segmento de linha AB tal que $PB = PC$ e o comprimento de PA é R . A mediatriz de PB intersecta Γ nos pontos D e E .

Prove que P é o incentro do triângulo CDE .

Problema 6. Seja $m > 1$ um número inteiro. Uma sequência a_1, a_2, a_3, \dots é definida por $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ e, para todo $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Determine todos os números inteiros m tais que todo termo da sequência é um quadrado perfeito.

Idioma: Português

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer esta competição justa e divertida para todas, por favor não mencione ou comente os problemas na internet ou nas redes sociais até Sábado 18 de Abril, 19:00 (Horário de Brasília).