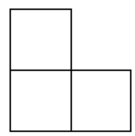
Cyberspace Mathematical Competition

Português (por), Dia 1

Segunda-feira, 13 de Julho de 2020

Problema 1. Considere um tabuleiro $n \times n$ formado por quadrados unitários. A diagonal principal do tabuleiro é a diagonal formada por n quadrados unitários desde o que está no canto superior esquerdo até o que está no canto inferior direito. Temos uma quantidade ilimitada de peças da seguinte forma:



As peças podem ser giradas. Queremos colocar peças no tabuleiro de modo que cada peça cubra exatamente três quadrados unitários, as peças não se sobreponham entre si, cada quadrado da diagonal principal não seja coberto e todos os outros quadrados unitários sejam cobertos exatamente uma vez. Para quais $n \geq 2$ isso é possível?

Problema 2. Seja $f(x) = 3x^2 + 1$. Prove que para qualquer inteiro positivo n dado, o produto

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n)$$

tem no máximo n divisores primos distintos.

Problema 3. Seja ABC um triângulo tal que $AB > BC$ e seja D um ponto variável sobre o segmento de reta BC. Seja E um ponto sobre a circunferência circunscrita do triângulo ABC no semiplano oposto de A em relação a BC tal que $\angle BAE = \angle DAC$. Seja I o incentro do triângulo ABD e seja J o incentro do triângulo ACE. Prove que a reta IJ passa por um ponto fixo que não depende de D.

Problema 4. Seja n um inteiro positivo ímpar. Alguns quadrados unitários de um tabuleiro $n \times n$ formado por quadrados unitários são coloridos de verde. Sabe-se que um rei do xadrez pode se mover de qualquer quadrado unitário verde até qualquer outro quadrado unitário verde usando uma sequência finita de movimentos que visitam apenas quadrados unitários verdes no caminho. Prove que o rei sempre pode fazer isso em no máximo $\dfrac{n^2-1}{2}$ movimentos. (Num movimento o rei do xadrez pode se mover de um quadrado unitário para outro se, e somente se, os dois quadrados compartilham um lado ou um vértice.)

Language: Portuguese *Tempo: 5 horas*

Cada problema vale 7 pontos

Cyberspace Mathematical Competition

Português (por), Dia 2

Terça-Feira, 14 de julho de 2020

Problema 5. Há 2020 inteiros positivos escritos num quadro. A cada minuto, Zuming apaga dois desses números e os substitui por sua soma, diferença, produto ou quociente. Por exemplo, se Zuming apaga os números 6 e 3, ele pode substituí-los por um dos números do conjunto $\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\}$. Após 2019 minutos, Zuming escreve apenas o número -2020 no quadro. Prove que seria possível Zuming ter terminado com apenas o número 2020 no quadro, usando as mesmas regras e começando com os mesmos 2020 inteiros.

Problema 6. Encontre todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais a seguinte afirmação é verdadeira: se $\mathcal{P}$ é um n-ágono convexo tal que $n-1$ dos seus lados têm o mesmo comprimento e $n-1$ dos seus ângulos têm a mesma medida, então $\mathcal{P}$ é um polígono regular.

Problem 7. Cada uma das n^2 casas de um tabuleiro $n \times n$ é colorida de preto ou de branco. Seja a_i o número de casas brancas na i-ésima linha e seja b_i o número de casas pretas na i-ésima coluna. Determine o valor máximo de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ ao variar sobre todas as colorações do tabuleiro.

Problem 8. Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita de números reais positivos tal que, para cada inteiro positivo n, temos

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2}{n+1}}.$$

Prove que a sequência $a_1, a_2, \ldots$ é constante.

Language: Portuguese

Tempo: 5 horas

Cada problema vale 7 pontos