Prova OMOP 2020

Dia 1 – 31 de outubro de 2020

1. Em certo país as moedas têm valores iguais a potências de 2 desde $2^0 = 1$ até $2^{10} = 1024$. Um caixa eletrônico possui 1000 moedas de cada valor e ao entregar cada valor ele usa cada moeda no máximo uma vez. Se vão chegando clientes pedindo todos os valores inteiros positivos 1, 2, 3, 4, 5, ... nesta ordem em moedas, qual será o primeiro valor que o caixa eletrônico não poderá fornecer? No momento em que o primeiro cliente não é atendido por falta de moedas, quais moedas não existem mais no caixa?

2. a) Encontre inteiros x e y tal que

$$y^2 = x^3 + 2017$$

b) Prove que não existem inteiros x e y, com y não divisível por 3, tal que

$$y^2 = x^3 - 2017$$

3. Seja ABC um triângulo e sobre os lados externamente são construídos quadrados $BADE$, $CBFG$ e $ACHI$. Determine a maior constante real positiva k tal que para qualquer triângulo ABC vale

$$[DEFGHI] \geq k \cdot [ABC]$$

em que $[DEFGHI]$ e $[ABC]$ representam as áreas do hexágono $DEFGHI$ e do triângulo ABC, respectivamente.

Tempo: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

Prova OMOP 2020

Dia 2 – 1 de novembro de 2020

4. Seja ABC um triângulo acutângulo. O incírculo toca os lados BC, CA e AB nos pontos D, E e F, respectivamente. Sejam P, Q e R os circuncentros dos triângulos AEF, BDF e CDE, respectivamente. Prove que os triângulos ABC e PQR são semelhantes.

Observação: o circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência que passa pelos três vértices.

5. De quantas formas podemos preencher as casinhas de um tabuleiro 4×4 com inteiros positivos, um inteiro em cada casinha, de modo que os produtos dos 4 números em cada uma das linhas e em cada uma das colunas seja 2020?

6. Prove que $\left\lfloor \sqrt{9n+7} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right\rfloor$ para todo inteiro positivo n, onde, para qualquer x real, $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor que ou igual a x.

Tempo: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos