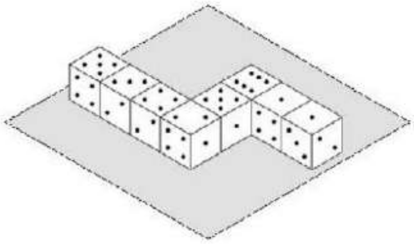
XXVIª OLIMPÍADA de MAIO
Primer Nivel
Outubro de 2020

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 7 de novembro.

PROBLEMA 1

Sofia coloca os dados em uma mesa como mostrado na figura, juntando faces que têm o mesmo número em cada dado. Ela dá voltas ao redor da mesa sem tocar nos dados. Qual a soma dos números de todas as faces que não se pode ver?



Nota. Em qualquer dado os números das faces opostas somam 7.

PROBLEMA 2

Pablo escreveu a lista de todos os números de quatro dígitos tais que o dígito das centenas é 5 e o dígito das dezenas é 7. Por exemplo, 1**57**3 e 7**57**0 estão na lista de Pablo, mas 2754 e 571 não. Calcule a soma de todos os números da lista de Pablo.

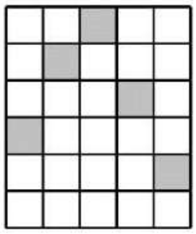
Nota. Os números da lista de Pablo não podem começar com zero.

PROBLEMA 3

Uma formiga distraída faz a seguinte rota: começando no ponto A ela anda 1 cm para o norte, depois 2 cm para o leste, continua 3 cm para o sul, em seguida 4 cm para o oeste, imediatamente 5 cm para o norte, continua 6 cm para o leste e assim sucessivamente, finalmente 41 cm para o norte e termina no ponto B. Calcule a distância entre A e B (em linha reta).

PROBLEMA 4

Maria tem um tabuleiro 6 × 5 com alguns quadrados sombreados, como na figura. Ela escreve, em alguma ordem, os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 na primeira linha e, em seguida, completa o tabuleiro da seguinte forma: olha para o número escrito na casa sombreada e escreve o número que ocupa a posição indicada pela casa sombreada como último número na próxima linha; depois repete os outros números nos primeiras quatro quadrados, seguindo a mesma ordem da linha anterior. Por exemplo, se você escreveu 2 3 4 1 5 na primeira linha, então como a casa sombreada é 4, o número que ocupa o quarto lugar (o 1) é escrito no último quadrado da segunda linha e ela é completada com os números restantes na ordem em estavam. Fica: 2 3 4 5 1. Então, para completar a terceira linha, como na caixa sombreada está o número 3, o número colocado na terceira posição (o 4) é escrito no último quadrado e obtém 2 3 5 1 4. Seguindo da mesma forma se obtém o tabuleiro da figura. Mostre uma maneira de colocar os números na primeira linha para obter na última linha os números 2 4 5 1 3.



2	3	4	1	5
2	3	4	5	1
2	3	5	1	4
3	5	1	4	2
3	5	4	2	1
5	4	2	1	3

PROBLEMA 5

Em uma mesa estão várias cartas, algumas viradas para cima e outras viradas para baixo. A operação permitida é escolher 4 cartas e virá-las. O objetivo é obter todas as cartas no mesmo estado (todas viradas para cima ou todas viradas para baixo). Determine se o objetivo pode ser alcançado por meio de uma sequência de operações permitidas se inicialmente houver:

a) 101 cartas viradas para cima e 102 viradas para baixo;
b) 101 cartas viradas para cima e 101 viradas para baixo.

XXVI^a OLIMPÍADA de MAIO
Segundo Nivel
Outubro de 2020

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não é permitido o uso de calculadoras; não é permitido consultar livros ou anotações.
Justifique cada uma das suas respostas.
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 7 de novembro.

PROBLEMA 1

Dizemos que um número inteiro positivo é *super-ímpar* se todos os seus dígitos forem ímpares. Por exemplo, 1737 é super-ímpar e 3051 não é. Encontre um número inteiro positivo par que não se pode expressar como uma soma de dois números super-ímpares e explique por que não é possível expressá-lo dessa maneira.

PROBLEMA 2

a) Determine se existem inteiros positivos a, b e c, não necessariamente distintos, tais que

$a + b + c = 2020$ e $2^a + 2^b + 2^c$ é um quadrado perfeito.

b) Determine se existem inteiros positivos a, b e c, não necessariamente distintos, tais que

$a + b + c = 2020$ e $3^a + 3^b + 3^c$ é um quadrado perfeito.

PROBLEMA 3

Existe uma caixa com 2020 pedras. Ana e Beto brincam de retirar pedras da caixa alternadamente e começando com Ana. Cada jogador na sua vez deve remover um número positivo de pedras que seja capicua. Quem conseguir deixar a caixa vazia vence. Determine qual dos dois tem uma estratégia vencedora e explique qual é essa estratégia.

Nota. Um número inteiro positivo é capicua se ele pode ser lido de modo igual da direita para a esquerda e da esquerda para a direita. Por exemplo, 3, 22, 484 e 2002 são capicuas.

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo retângulo, reto em B, e seja M o ponto médio do lado BC. Seja P o ponto na bissetriz do ângulo $\angle BAC$ tal que PM é perpendicular a BC (P está fora do triângulo ABC). Determine a área do triângulo ABC se $PM = 1$ e $MC = 5$.

PROBLEMA 5

Dizemos que um inteiro positivo n é circular se é possível colocar os números $1, 2, \ldots, n$ em uma circunferência de forma que não haja três números adjacentes cuja soma seja um múltiplo de 3.

a) Mostre que 9 não é circular.

b) Mostre que todo número inteiro maior que 9 é circular.