XXI Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Águas de São Pedro, Brasil, 13–19 de Junho de 2010

Quinta-feira, 17 de Junho de 2010

Problema 4. Pablo e Sílvia jogam em um tabuleiro 2010×2010. Primeiro Pablo escreve um número inteiro em cada casa. Feito isso, Sílvia repete tantas vezes quanto quiser a seguinte operação: escolher três casas que formem um L, como na figura, e somar 1 a cada número dessas três casas. Sílvia ganha se fizer com que todos os números do tabuleiro sejam múltiplos de 10.

Demonstre que Sílvia sempre pode escolher uma sequência de operações com as quais ela ganha o jogo.

Problema 5. O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. Sejam ω_a, ω_b e ω_c os circuncírculos dos triângulos EAF, DBF e DCE, respectivamente. As retas DE e DF cortam ω_a em $E_a \neq E$ e $F_a \neq F$, respectivamente. Seja r_A a reta E_aF_a. Defina r_B e r_C de modo análogo. Prove que as retas r_A, r_B e r_C determinam um triângulo cujos vértices pertencem aos lados do triângulo ABC.

Problema 6. Determine se existe uma sequência infinita $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ de inteiros não negativos que satisfaz as seguintes condições:

(i) Todos os números inteiros não negativos aparecem na sequência uma única vez;

(ii) A sequência

$$b_n = a_n + n, \quad n \geq 0,$$

é formada por todos os números primos, cada um aparecendo uma única vez.

Idioma: Português — *Duração: 4 h*

Cada problema vale 10 pontos