IMC 2010 - 1^o DIA

Problema 1. Seja $0 < a < b$. Prove que

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}$$

Problema 2. Calcule a some da série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots$$

Problema 3. Defina a sequência $x_1, x_2, \dots$ indutivamente por $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ para $n \geq 1$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}{x_{n+1}}$$

Problema 4. Sejam a, b dois inteiros e suponha que n seja um inteiro positivo para o qual o conjunto

$$\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

seja finito. Prove que $n = 1$.

Problema 5. Sejam a, b, c números no intervalo $[-1, 1]$ tais que

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Prove que,

$$1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$$

para todo inteiro positivo n.