IMC 2010 - 2^o DIA

Problema 1. (a) Uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ de números reais satisfaz

$$x_{n+1} = x_n cos x_n, \forall n \geq 1.$$

É verdade que, para todo valor inicial x_1, essa sequência converge?

(b) Uma sequência $x_1, x_2, \ldots$ de números reais satisfaz

$$y_{n+1} = y_n sen y_n, \forall n \geq 1.$$

É verdade que, para todo valor inicial x_1, essa sequência converge?

Problema 2. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais positivos tais que $a_{k+1} - a_k \geq 1$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Prove que

$$1 + \frac{1}{a_0}(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n - a_0}) \leq (1 + \frac{1}{a_0})(1 + \frac{1}{a_1}) \cdots (1 + \frac{1}{a_n})$$

Problema 3. Seja S_n o grupo de permutações da sequência $(1, 2, \ldots, n)$. Suponha que G seja um subgrupo de S_n tal que, para cada permutação $\pi \in G \setminus \{e\}$, existe um único $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para o qual $\pi(k) = k$ (e é a unidade do grupo S_n). Mostre que k é o mesmo para todo $\pi \in G \setminus \{e\}$.

Problema 4. Seja A uma matriz $m \times m$ simétrica definida no corpo de dois elementos. Suponha que todos os elementos da diagonal de A sejam zero. Prove que, para todo inteiro positivo n, cada coluna da matriz A^n tem uma entrada igual a zero.

Problema 5. Suponha que, para a funcão $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(y + \frac{k}{p}) = 0$$

para todo número primo p and todo número real y.