Soluções da VIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária 2005

Problema 1 (4 pontos)
Sejam $P(x,y) = (x^2y^3, x^3y^5)$, $P^1 = P$ e $P^{n+1} = P \circ P^n$. Seja $p_n(x)$ a primeira coordenada de $P^n(x,x)$ e seja $f(n)$ o grau de p_n. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} (f(n))^{1/n}.$$

Solução:

Afirmamos que $P^n(x,y) = (x^{a_n}y^{b_n}, x^{c_n}y^{d_n})$, onde as seqüências $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ satisfazem $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 3$, $d_1 = 5$ e, para todo $n \geq 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3c_n$, $b_{n+1} = 2b_n + 3d_n$, $c_{n+1} = 3a_n + 5c_n$ e $d_{n+1} = 3b_n + 5d_n$. De fato, isso segue por indução de $P^{n+1}(x,y) = P(P^n(x,y)) = P(x^{a_n}y^{b_n}, x^{c_n}y^{d_n}) = ((x^{a_n}y^{b_n})^2(x^{c_n}y^{d_n})^3,$ $(x^{a_n}y^{b_n})^3(x^{c_n}y^{d_n})^5) = (x^{2a_n+3c_n}y^{2b_n+3d_n}, x^{3a_n+5c_n}y^{3b_n+5d_n})$.

Daí segue que

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[2 pontos]

A primeira coordenada de $P^n(x,x)$ é $x^{a_n+b_n}$. Os autovalores de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ são as raízes de $x^2 - 7x + 1 = 0$, as quais são $\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$, donde, para todo n, $a_n + b_n$ se escreve como $A\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para certas constantes A e B. Considerando os casos $n = 0$ e $n = 1$, obtemos o sistema $A + B = 1$, $A\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = 5$, donde $A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $B = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Em particular, como $A > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} (f(n))^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)^{1/n} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

[+ 2 pontos]

Nota: De fato, $f(n) = a_n + b_n = F_{4n+1}$, onde F_k é o k-ésimo termo da seqüência de Fibonacci dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Problema 2 (5 pontos)

Considere matrizes reais quadradas A, B, C de ordem n tais que $A^3 = -I$, $BA^2 + BA = C^6 + C + I$ e C é simétrica. É possível ter $n = 2005$?

Solução:

Os autovalores λ de A devem satisfazer $\lambda^3 = -1$. Por outro lado, afirmamos que -1 não pode ser autovalor. De fato, suponha por absurdo $Av = -v$. Temos $(BA^2 + BA)v = Bv - Bv = 0$ donde $C^6 + C + I$ tem autovalor 0. Por outro lado, como C é simétrica seus autovalores μ são todos reais e se μ é real então $\mu^6 + \mu + 1 > 0$, contradição.

Assim os únicos autovalores de A são os números complexos $(1 \pm \sqrt{-3})/2$: como as multiplicidades devem ser iguais, segue que n é par.

Critério:

Observar que os autovalores de A são -1 ou $(1 \pm \sqrt{-3})/2$: *1 ponto*

Observar que $C^6 + C + I$ tem autovalores reais positivos: *1 ponto*

Solução completa: *5 pontos*

Problema 3 (5 pontos)

Considere a seqüência definida recursivamente por $(x_1, y_1) = (0, 0)$,

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) x_n - \frac{1}{n} y_n + \frac{4}{n}, \left(1 - \frac{1}{n}\right) y_n - \frac{1}{n} x_n + \frac{3}{n}\right).$$

Calcule $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n)$.

Solução:

Podemos escrever a recorrência como

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + \frac{1}{n}(4 - 2x_n - y_n, 3 - x_n - y_n).$$

Seja $Q = (a, b)$ o ponto tal que $2a + b = 4$ e $a + b = 3$, isto é, $Q = (1, 2)$. Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = Q$.

[2 pontos]

Escrevendo $x_n = 1 + r_n$, $y_n = 2 + s_n$, a recorrência torna-se

$$\begin{aligned}(r_{n+1}, s_{n+1}) &= (r_n, s_n) + \frac{1}{n}(-2r_n - s_n, -r_n - s_n)\\ &= \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) r_n - \frac{1}{n} s_n, -\frac{1}{n} r_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_n\right).\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}|(r_{n+1}, s_{n+1})|^2 &= \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) r_n - \frac{1}{n} s_n\right)^2 + \left(-\frac{1}{n} r_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_n\right)^2\\ &= \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}\right) r_n^2 - \frac{2}{n}\left(2 - \frac{3}{n}\right) r_n s_n + \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right) s_n^2\end{aligned}$$

e, como $-2r_n s_n \le \frac{3}{2} r_n^2 + \frac{2}{3} s_n^2$,

$$\begin{aligned}|(r_{n+1}, s_{n+1})|^2 &\le \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) r_n^2 + \left(1 - \frac{2}{3n}\right) s_n^2 \le \left(1 - \frac{2}{3n}\right)(r_n^2 + s_n^2)\\ &= \left(1 - \frac{2}{3n}\right)|(r_n, s_n)|^2, \quad \text{para todo } n \ge 2.\end{aligned}$$

Como $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{3n}\right) = 0$, segue que $\lim_{n\to\infty}(r_n, s_n) = 0$, donde

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = Q = (1, 2).$$

[+ 3 pontos]

Problema 4 (5 pontos)

Uma tangente variável t à circunferência $\mathcal{C}_1$, de raio r_1, corta a circunferência $\mathcal{C}_2$, de raio r_2, nos pontos A e B. As tangentes a $\mathcal{C}_2$ em A e B cortam-se no ponto P. Determine, em função de r_1 e r_2, a distância entre os centros de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ para a qual o lugar geométrico de P ao variar t está contido em uma hipérbole equilátera.

Obs: Uma hipérbole é equilátera se as suas assíntotas são perpendiculares.

Solução:

P é o pólo de t em relação a $\mathcal{C}_2$. Considerando $\mathbb{R}^2$ contido no plano $\mathbb{P}^2$ da maneira usual, como a polaridade definida por $\mathcal{C}_2$ é uma transformação projetiva do espaço dual (formado pelas retas de $\mathbb{P}^2$) em $\mathbb{P}^2$ e t percorre uma cônica não degenerada no espaço dual, temos que P necessariamente percorrerá uma cônica não degenerada em $\mathbb{P}^2$. Esta cônica será uma hipérbole quando contiver dois pontos distintos na reta do infinito. Tal hipérbole será equilátera quando seus dois pontos do infinito corresponderem a feixes de retas perpendiculares em $\mathbb{R}^2$. O ponto P pertence à reta do infinito quando t passa pelo centro de $\mathcal{C}_2$, em cujo caso P corresponde ao feixe de retas perpendiculares a t. Assim, P percorrerá uma hipérbole equilátera quando houver duas retas perpendiculares passando pelo centro de $\mathcal{C}_2$ e tangentes a $\mathcal{C}_1$. Isto ocorre se, e somente se,

$$d = \sqrt{2}r_1$$

.

Critério:

Provar que o L.G. de P está contido em uma cônica: *2 pontos*

Encontrar $d = \sqrt{2}r_1$: *+ 1 ponto*

Provar que o L.G. de P está contido em uma hipérbole equilátera se, e somente se, $d = \sqrt{2}r_1$: *+ 2 pontos*

Solução alternativa:

Considere os pontos A e B em C_2, e o ponto P, interseção entre as tangentes a C_2 em A e B, como no enunciado. Sejam M o ponto médio de AB e O o centro de C_2. Temos então que o triângulo OAP é retângulo em A, e AM é sua altura em relação à hipotenusa OP. Assim, $OM \cdot OP = OA^2 = r_2^2$.

Supondo sem perda de generalidade que o centro de C_1 é $(0,0)$ e o centro de C_2 é $(d,0)$, se t é tangente a C_1 em $r_1(c,s)$, $c = \cos b$,$s = \operatorname{sen} b$, temos que a equação de t é $cx + sy = r_1$, enquanto a equacao de C_2 é $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$. Se t corta C_2 em dois pontos, as abscissas desses pontos são as raízes de $s^2(x-d)^2 + (r_1 - cx)^2 = r_2^2 s^2$, ou seja, de

$x^2 - 2(ds^2 + r_1c)x + (s^2(d^2 - r_2^2) + r_1^2) = 0$. Assim, a abscissa de M é a média aritmética das duas raízes dessa equação, que é $ds^2 + r_1c$. De modo análogo segue que a ordenada de M é $s(r_1 - dc)$. Assim (como $ds^2 + r_1c - d = r_1c - dc^2$), o vetor OM é igual a $M - O = M - (d, 0) = (r_1 - dc)(c, s)$. Daí segue que o segmento OM mede $|r_1 - dc|$ e, de $OM \cdot OP = (r_2)^2$, obtemos $P = (d, 0) + r_2^2(c, s)/(r_1 - dc)$. Quando b varia, fazendo $x = d + r_2^2c/(r_1 - dc)$ e $y = r_2^2s/(r_1 - dc)$, temos $d(x - d) + r_2^2 = r_2^2r_1/(r_1 - dc)$, donde segue que (x, y) satisfaz a equação $(x - d)^2 + y^2 = r_2^4/(r_1 - dc)^2 = (d(x - d) + r_2^2)^2/(r_1)^2$. Isso dá a equação de uma cônica cuja parte de segundo grau é $(1 - (d/r_1)^2)x^2 + y^2$, e essa cônica é uma hipérbole equilátera se e somente se $1 - (d/r_1)^2 = -1$, i.e., se e somente se $d = \sqrt{2}r_1$.

Observação:

Muitas outras soluções analíticas são igualmente possíveis. Nenhum ponto deve ser dado se o aluno, mesmo escrevendo equações corretas, não conseguiu isolar a equação do L.G. de P ou mesmo não conseguiu simplificá-la corretamente obtendo a equação de uma cônica. Soluções corretas salvo erros de conta perdem 1 ponto.

Problema 5 (6 pontos)

Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo em que cada um na sua vez diz um número natural e ganha aquele que disser 0. A cada jogada exceto a primeira, as jogadas válidas são determinadas a partir da jogada anterior n da seguinte forma: escreva

$$n = \sum_{m \in O_n} 2^m;$$

as jogadas válidas são os elementos m de O_n. Assim, por exemplo, depois de Arnaldo dizer $42 = 2^5 + 2^3 + 2^1$, Bernaldo deve responder com 5, 3 ou 1.

Definimos conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$ da seguinte forma. Temos $n \in A$ se e somente se Arnaldo, dizendo n na primeira jogada, tiver uma estratégia que garanta sua vitória; analogamente, temos $n \in B$ se e somente se Bernaldo tiver uma estratégia que garanta a sua vitória caso Arnaldo diga n na primeira jogada. Assim,

$$A = \{0, 2, 8, 10, \ldots\}, \quad B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \ldots\}.$$

Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|$. Assim, por exemplo, $f(8) = 2$ e $f(11) = 4$. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n}.$$

Solução:

Seja n um inteiro positivo. Se $O_n \cap A \neq \emptyset$ então $n \in B$, ou seja, Bernaldo tem uma estratégia para vencer um jogo em que Arnaldo começa dizendo n: basta responder com $m \in O_n \cap A$ e a partir daí copiar a estratégia que seria de Arnaldo. Por outro lado, se $O_n \cap A = \emptyset$ então $n \in A$, ou seja, Bernaldo não tem nenhuma boa resposta: de fato, para qualquer $m \in O_n$ temos $m \in B$ donde agora é Arnaldo que pode copiar a estratégia que seria de Bernaldo. Resumindo,

$$n \in A \iff O_n \subset B. \tag{5.1}$$

Suponha $f(n) = c = |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|$. Assim $|B \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}| = n - c$ e há portanto 2^{n-c} naturais m no conjunto $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ para os quais $O_m \subset B$. Ou seja,

$$f(2^n) = 2^{n - f(n)}. \tag{5.2}$$

Claramente todos os elementos de A são pares donde $f(n) \leq (n+1)/2$. Assim $f(2^n) \geq 2^{(n-1)/2} = \sqrt{2^n}/\sqrt{2}$. Se $2^m \leq n < 2^{m+1}$ temos

$$f(n) \geq f(2^m) = \frac{\sqrt{2^m}}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}. \tag{5.3}$$

Assim $f(2^n) \leq 2^{n-\frac{\sqrt{n}}{2}}$ e portanto se $2^{m-1} < n \leq 2^m$ temos

$$f(n) \leq f(2^m) \leq 2^{m-\frac{\sqrt{m}}{2}} \leq n\ 2^{1-\frac{\sqrt{m}}{2}} \tag{5.4}$$

donde, como $\log n \leq m \log 2$,

$$\frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n} \leq 2(\log 2)^{2005} \frac{m^{2005}}{2^{\frac{\sqrt{m}}{2}}}$$

ou, tomando $l = \sqrt{m}$,

$$\frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n} \leq C \frac{l^{4010}}{(\sqrt{2})^l}$$

para uma constante positiva (e irrelevante) C. Como claramente temos

$$\lim_{l \to \infty} \frac{l^{4010}}{(\sqrt{2})^l} = 0$$

temos também

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)\ (\log(n))^{2005}}{n} = 0.$$

Critério:

Obter uma caracterização recursiva de A e B (como em 5.1): *1 ponto.*

Obter a identidade 5.2 ou equivalente: *+1 ponto.*

Obter a estimativa 5.3 ou equivalente: *+1 ponto.*

Obter a estimativa 5.4 ou equivalente: *+1 ponto.*

Solução completa: *6 pontos*

Problema 6 (6 pontos)

Uma função suave $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *totalmente convexa* se $(-1)^k f^{(k)}(t) > 0$ para todo $t \in I$ e para todo inteiro $k > 0$ (aqui I é um intervalo aberto).

Prove que toda função totalmente convexa $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é real analítica.

Obs: Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é suave se para todo inteiro positivo k a derivada de k-ésima ordem $f^{(k)}$ for definida e contínua em $\mathbb{R}$. Uma função suave $f : I \to \mathbb{R}$ é real analítica se para todo $t \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo número real h com $|h| < \epsilon$ a série de Taylor

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} h^k$$

converge e vale $f(t + h)$.

Solução:

Se $x > 0$ e $0 < h < x$, então, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange,

$$f(x-h) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k + \frac{f^{(n+1)}(x - \theta h)(-h)^{n+1}}{(n+1)!},$$

para algum $\theta = \theta(x, h) \in (0, 1)$. A hipótese $(-1)^k f^{(k)}(t) > 0$, para todo $t \in (0, +\infty)$ garante que $f^{(k)}(x)(-h)^k > 0$, $\forall\ k \leq n$, e $f^{(n+1)}(x - \theta h)(-h)^{n+1} > 0$. Daí segue que

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k < f(x-h) - f(x), \quad \forall\ n \in \mathbb{N},$$

e, em particular,

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \cdot |h|^k < f(x-h) - f(x), \quad \forall\ x \in (0, +\infty), \quad h \in (0, x) \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

[3 pontos]

Se $x \in (0, +\infty)$, e $|h| < x/3$, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange nos dá

$$\left| f(x+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot h^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x + \theta h) \cdot h^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

para algum $\theta \in (0, 1)$, mas, como os sinais de $f^{(n+1)}$ e $f^{(n+2)}$ são opostos, $|f^{(n+1)}(y)|$ é decrescente em $(0, +\infty)$, donde

$$|f^{(n+1)}(x + \theta h)| \leq |f^{(n+1)}(x - |h|)| \leq |f^{(n+1)}(2x/3)|.$$

Além disso,
$$\frac{|f^{(n+1)}(2x/3)|\cdot|\frac{x}{3}|^{n+1}}{(n+1)!} < f(\frac{x}{3}) - f(\frac{2x}{3}),$$
donde
$$\left|f(x+h) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)\cdot h^k}{k!}\right| < \left(f(\frac{x}{3}) - f(\frac{2x}{3})\right)\cdot\left(\frac{3|h|}{x}\right)^{n+1},$$
que tende a 0 quando n tende a infinito, pois $|h| < \frac{x}{3}$. Assim, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)\cdot h^k}{k!}$ converge e vale $f(x+h)$, o que prova o resultado.

[+3 pontos]

Solução alternativa:

Como acima, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange (ou resto integral), se $0 < h < x$, então
$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k\right| < f(x-h) - f(x)$$
donde para todo $x > 0$ a série de Taylor tem raio de convergência $r_x \geq x$.

[2 pontos]

Para todo $x > 0$, $|h| < x$, defina
$$g_x(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k, \quad g_{x,n}(x+h) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k;$$
note que g_x é holomorfa na bola de centro x e raio x no plano complexo. Novamente por uma das fórmulas para o resto da aproximação de Taylor temos, se $0 < h < x$,
$$g_{x,2n+1}(x+h) < f(x+h) < g_{x,2n+2}(x+h)$$
e, tomando o limite quando n tende a infinito, concluimos que $g_x(z) = f(z)$ para $x < z < 2x$.

[+2 pontos]

Assim, se $0 < x_1 < x_2 < 2x_1$, as funções g_{x_1} e g_{x_2} coincidem com f e entre si para todo z real no intervalo $(x_2, 2x_1)$ e portanto g_{x_1} é a restrição de g_{x_2} a uma bola menor. Encadeando vários x_i temos a mesma conclusão para quaisquer $0 < x_1 < x_2$ donde f pode ser estendida a uma função holomorfa no semiplano direito $\{a+bi; a > 0\} \subset \mathbb{C}$.

[+2 pontos]

Problema 7 (7 pontos)

Demonstre que para quaisquer inteiros n e p, $0 < n \leq p$, todas as raízes do polinômio abaixo são reais:

$$P_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j} \binom{p}{n-j} x^j.$$

Solução:

Considere $q(t) = t^p(1-t)^p$. Observe que todas as raízes de q são reais e portanto todas as raízes de $q^{(n)}$ são reais: 0 e 1 são raízes de multiplicidade $p-n$ e há n outras raízes no intervalo aberto $(0,1)$: $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$. Derivando,

$$\begin{aligned}
q^{(n)}(t) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{p!}{(p-j)!}\, t^{p-j}\, \frac{p!}{(p-n+j)!}\, (-1)^{n-j}\, (1-t)^{p-n+j} \\
&= (-1)^n\, t^p\, (1-t)^{p-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!p!p!}{j!(n-j)!(p-j)!(p-n+j)!}((t-1)/t)^j \\
&= (-1)^n\, t^p\, (1-t)^{p-n}\, n! \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j}\binom{p}{n-j}((t-1)/t)^j \\
&= (-1)^n\, t^p\, (1-t)^{p-n}\, n!\, P_{n,p}((t-1)/t)
\end{aligned}$$

donde as n raízes de $P_{n,p}$ são os números reais negativos $x_i = (t_i - 1)/t_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Critério:

Contar as raízes, observar que se as raízes são reais então elas são negativas ou resolver o problema para valores particulares de n ou p: *0 pontos.*

Manipulações algébricas ou Interpretações combinatórias para os coeficientes de $P_{n,p}$: *0 pontos.*

Resolver corretamente o caso $p = n$: *2 pontos.*

Solução completa: *7 pontos*