

**Soluções da VII Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária**  
**2004**

1) Seja  $p$  um polinômio de grau menor ou igual a 4 com  $p(1) = p(-1) = 0$ ,  $p(0) = 1$  e tal que, para todo  $x \in [-1, 1]$ ,  $p(x) \leq 1$ . Encontre o maior valor possível de

$$\int_{-1}^1 p(t) dt.$$

**Solução:**

Se  $p(1) = p(-1) = 0$ ,  $p(x)$  é um polinômio da forma  $p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$ .  
[1 ponto]

Como  $p(0) = 1$  e  $p(x) \leq 1$  para todo  $x \in [-1, 1]$ , temos que 0 é ponto de máximo local de  $p(x)$ , e logo  $p'(0) = 0$ . Assim, como  $p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$ , devemos ter  $c = -1$  e, como  $p'(x) = 2x(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 1)(2ax + b)$ ,  $0 = p'(0) = -b$ , donde  $b = 0$ .  
[+ 1 ponto]

Assim,  $p(x) = (x^2 - 1)(ax^2 - 1)$ , e, como 0 é ponto de máximo local, devemos ter  $p''(0) = -2(1 + a) \leq 0$ , donde  $a \geq -1$ . Assim,  $p(x) = (1 - x^2)(1 - ax^2) \leq (1 - x^2)(1 + x^2) = 1 - x^4$  para  $-1 \leq x \leq 1$ , e  $p(x) = 1 - x^4$  satisfaz as condições do enunciado. Assim,  $\int_{-1}^1 p(t) dt \leq \int_{-1}^1 (1 - t^4) dt = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ .  
[+ 2 pontos]

2) Considere a matriz real quadrada  $S$  de ordem  $r$  e entradas

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^n k^{i+j}.$$

Calcule  $\det S$  (em função de  $r$ ).

**Solução:**

Seja  $A$  a matriz com entradas  $a_{ij} = j^i$ .

Podemos escrever  $S = AA^t$ , donde  $\det S = (\det A)^2$ .

Escreva

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^n & 2^n & 3^n & \dots & n^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{(n-1)n} \end{pmatrix}}_V \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{pmatrix}}_D$$

donde  $\det A = \det V \cdot \det D$ .

Claramente  $\det D = n!$

[2 pontos]

A matriz  $V$  é uma matriz de Vandermonde:

$$\det V = \prod_{i < j} (j - i) = (n - 1)!(n - 2)! \dots 2! \cdot 1!$$

Assim,  $\det S = (1! \dots 2! \dots 3! \dots (n - 1)! \cdot n!)^2$ .

Observar a relevância da matriz  $V$  e de seu determinante:

[2 pontos]

Calcular  $\det V$ .

[2 pontos]

3) Sejam  $N_1, N_2, N_3$  matrizes reais  $2 \times 2$  tais que  $N_1^2 = N_2^2 = N_3^2 = 0$ .

Prove que se existirem números reais  $x_1, x_2, x_3$  não todos nulos com

$$x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$$

então existem índices  $i \neq j$  e um número real  $r$  com  $N_i = r N_j$ .

**Solução:**

O caso  $N_i = 0$  é trivial.

Claramente devemos ter  $\text{tr } N_1 = \text{tr } N_2 = \text{tr } N_3 = 0$ .

Escreva  $N_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$

Temos  $N_1^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1 c_1 & 0 \\ 0 & a_1^2 + b_1 c_1 \end{pmatrix}$

Assim,  $a_1^2 + b_1 c_1 = 0$ . Analogamente,  $a_2^2 + b_2 c_2 = a_3^2 + b_3 c_3 = 0$ . (\*)

[2 pontos]

**1ª solução:**

O conjunto dos pontos  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tais que  $a^2 + bc = 0$  é um cone circular reto em  $\mathbb{R}^3$  pois  $a^2 + bc = a^2 + \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{\sqrt{2}}\right)^2$ .

Assim todo plano passando pela origem intersecta o cone em 0, 1 ou 2 retas. Se existem  $x_1, x_2, x_3$  não todos nulos com  $x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$  então  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$ ,  $(a_3, b_3, c_3)$  estão na interseção do cone com o plano  $x_1 a + x_2 b + x_3 c = 0$ , donde há dois pontos colineares, como queríamos demonstrar.

**2ª solução** (a partir de (\*))

Se  $c_i \neq 0$ , podemos, multiplicando  $N_i$  por  $\frac{1}{c_i}$ , supor  $c_i = 1$ . Temos assim 3 casos a considerar:

**$c_1 = c_2 = c_3 = 1$**

Temos  $b_i = -a_i^2$ . Assim os 3 pontos  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ ,  $(a_3, b_3)$  estão sobre a parábola  $b = -a^2$ . Se  $x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$  então os 3 pontos são colineares mas, estando sobre uma parábola, isto significa que dois deles coincidem, como queríamos.

[+ 2 pontos]

**$c_1 = c_2 = 1, c_3 = 0$**

Podemos supor  $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ou seja,  $a_3 = 0$ ,  $b_3 = 1$ ,  $c_3 = 0$ .

Se  $x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 = 0$  então  $x_1 + x_2 = 0$  e  $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$ , donde  $a_2 = a_1$  e  $N_2 = N_1$ , como queríamos.

**$c_2 = c_3 = 0$**

Neste caso podemos escrever  $N_2 = r N_3$ .

**3ª solução** (a partir de (\*))

Como na segunda solução dividimos em casos, agora fazendo

$$\left(a = 1, b = -\frac{1}{c}\right) \text{ ou } \left(N = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ ou } \left(N = b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Os dois pontos com  $a = 0$  precisam ser tratados separadamente. Os pontos da forma  $a = 1$  formam uma hipérbole, onde não existem 3 pontos colineares.

(+ 2 pontos por tratar o caso  $a = 1$ )

4) Seja  $\{0, 1\}^n$  o conjunto das seqüências de  $n$  termos com valores 0 ou 1. Dizemos que dois pontos de  $\{0, 1\}^n$  são *vizinhos* se diferirem em uma única coordenada.

Os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  são disjuntos e sua união é  $\{0, 1\}^n$ . Sabemos que para quaisquer  $i \neq j$  existem  $a_i \in A_i$  e  $a_j \in A_j$  tais que  $a_i$  e  $a_j$  são vizinhos. Prove que

$$n \geq 2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1.$$

**Solução:**

Como  $\{0, 1\}^n$  tem  $2^n$  elementos e  $A_1, A_2, \dots, A_k$  são disjuntos, deve existir  $j \leq k$  tal que  $A_j$  tem no máximo  $2^n/k$  elementos. [1 ponto]

Como, para todo  $i \leq k$  com  $i \neq j$ , existem  $a_i \in A_i$  e  $a_j \in A_j$  tais que  $a_i$  e  $a_j$  são vizinhos, e há  $k - 1$  possíveis escolhas para  $i \neq j$ , devemos ter  $k - 1 \leq n \cdot 2^n/k$ ,

pois há no máximo  $2^n/k$  escolhas para  $a_j \in A_j$ , e cada um desses  $a_j$  tem  $n$  vizinhos. Assim, temos  $k(k-1) \leq n \cdot 2^n$ . [ +3 pontos ]

Como  $f(n) = n \cdot 2^n$  é uma função crescente, é suficiente mostrar que  $f(2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) \leq k(k-1)$  para concluir o resultado, mas  $f(2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) = (2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) 2^{2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1} = (2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) \cdot k^2 / (2 \log_2 k)$ , donde  $f(2 \log_2 k - \log_2 \log_2 k - 1) \leq k(k-1) \Leftrightarrow 1 - \frac{\log_2 \log_2 k + 1}{2 \log_2 k} \leq 1 - \frac{1}{k} \Leftrightarrow 2 \log_2 k \leq k(\log_2 \log_2 k + 1)$ . Para  $k = 2$  vale a igualdade, para  $k \geq 4$  temos  $k^2 \leq 2^k$ , donde  $2 \log_2 k \leq k < k(\log_2 \log_2 k + 1)$ , e para  $k = 3$   $2 \log_2 3 \leq 3(\log_2 \log_2 3 + 1) \Leftrightarrow 9 \leq 8 \cdot (\log_2 3)^3$ , mas  $\log_2 3 \geq \frac{3}{2}$ , donde  $8 \cdot (\log_2 3)^3 \geq 8 \cdot \frac{3}{2} = 12 > 9$ . Assim, o resultado vale para todo  $k \geq 2$ . [ +2 pontos ]

5) Seja  $\mathfrak{T}_k \subset \mathbb{C}$  o conjunto de todas as raízes de polinômios mônicos de grau  $k$  e coeficientes inteiros.

i) Mostre que  $\mathfrak{T}_2 \cap \mathbb{R}$  é denso em  $\mathbb{R}$  mas  $\mathfrak{T}_2$  não é denso em  $\mathbb{C}$ .

ii) Determine se  $\mathfrak{T}_3$  é denso em  $\mathbb{C}$ .

Obs: Um polinômio é mônico se o seu coeficiente de mais alto grau é igual a 1. Um conjunto  $X$  é denso em  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) se para todo  $z \in \mathbb{R}$  (resp.  $z \in \mathbb{C}$ ) e todo  $\epsilon > 0$  existir  $w \in X$  com  $|z - w| < \epsilon$ .

**Solução:** a) As raízes de  $x^2 - ax + b = 0$  são dadas por  $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ , e, se não são reais, sua parte real é  $\frac{a}{2}$ , que é a metade de um inteiro. Assim,  $\mathfrak{T}_2$  não é denso em  $\mathbb{C}$ , pois não há, por exemplo, nenhum elemento de  $\mathfrak{T}_2$  a uma distância menor que  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{4} + i$ . [1 ponto]

Por outro lado, dado  $x \in \mathbb{R}$ , temos, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , suficientemente grande,  $x = (x + k) - k = \sqrt{x^2 + 2kx + k^2} - k$ , donde  $|(\sqrt{x^2 + 2kx + k^2} - k) - x| = \left| \sqrt{x^2 + 2kx + k^2} - \sqrt{x^2 + 2kx + k^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{[x^2 + 2kx + k^2]} + \sqrt{x^2 + 2kx + k^2}} \leq \frac{1}{x + k}$ , que tende a 0 quando  $k$  tende a infinito, o que mostra que  $\mathfrak{T}_2 \cap \mathbb{R}$  é denso em  $\mathbb{R}$ , pois

$\sqrt{[x^2 + 2kx + k^2]} - k =: y$  satisfaz a equação  $(y + k)^2 = [x^2 + 2kx + k^2] \in \mathbb{Z}$ , e logo pertence a  $\mathfrak{T}_2$ . [1 ponto]

b) As raízes  $x_1, x_2$  e  $x_3$  de  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  satisfazem

$$(*) \quad x_1 + x_2 + x_3 = a, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \quad x_1x_2x_3 = c.$$

[1 ponto]

Vamos provar que  $\mathfrak{T}_3$  é denso em  $\mathbb{C}$ . Dado um número complexo  $\alpha + \beta i$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , queremos mostrar que ele pode ser aproximado por elementos de  $\mathfrak{T}_3$  com erro arbitrariamente pequeno. Supomos sem perda de generalidade  $\beta \neq 0$ . Seja  $R = \alpha^2 + \beta^2$ . Para cada  $a \in \mathbb{N}$  grande, a equação

$$P(x) := x^3 - ax^2 + (2\alpha(a - 2\alpha) + R)x - R(a - 2\alpha) = 0$$

tem raízes  $\alpha + \beta i$ ,  $\alpha - \beta i$  e  $a - 2\alpha$ , por (\*). Vamos mostrar que a equação

$$Q(x) := x^3 - ax^2 + [2\alpha(a - 2\alpha) + R]x - [R(a - 2\alpha)] = 0$$

tem raízes próximas a  $\alpha + \beta i$ ,  $\alpha - \beta i$  e  $a - 2\alpha$ , se  $a$  é suficientemente grande.

[2 pontos, por considerar essas equações com  $a$  grande]

Dado  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , temos, com  $b = 2\alpha(a - 2\alpha) + R$ ,

$$\begin{aligned} P(a - 2\alpha + \varepsilon) &= P(a - 2\alpha + \varepsilon) - P(a - 2\alpha) = \\ &= 3\varepsilon(a - 2\alpha)^2 + 3\varepsilon^2(a - 2\alpha) + \varepsilon^3 - a(2\varepsilon(a - 2\alpha) + \varepsilon^2) + b\varepsilon = \\ &= \varepsilon(a - 2\alpha)^2 - 2\varepsilon(\alpha - \varepsilon)(a - 2\alpha) + (R\varepsilon - 2\alpha\varepsilon^2 + \varepsilon^3) = \varepsilon a^2 + O(a), \end{aligned}$$

enquanto  $|Q(a - 2\alpha + \varepsilon) - P(a - 2\alpha + \varepsilon)| \leq |a - 2\alpha + \varepsilon| + 1 = O(a)$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $Q(a - 2\alpha + \varepsilon) = \varepsilon a^2 + O(a) > 0$  e  $Q(a - 2\alpha - \varepsilon) = -\varepsilon a^2 + O(a) < 0$ , se  $a \in \mathbb{N}$  é suficientemente grande, donde  $Q(x)$  tem uma raiz no intervalo  $(a - 2\alpha - \varepsilon, a - 2\alpha + \varepsilon)$ .

Em outras palavras,  $Q(x)$  tem uma raiz  $a - 2\tilde{\alpha}$ , com  $\tilde{\alpha} = \alpha + o(1)$ , onde usamos a

notação  $o(1)$  para representar termos que tendem a 0 quando  $a$  cresce. As outras raízes de  $Q(x)$ , digamos  $y_1$  e  $y_2$ , satisfazem

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = a - (a - 2\tilde{\alpha}) = 2\tilde{\alpha} = 2\alpha + o(1) \\ y_1 \cdot y_2 = \lfloor R(a - 2\alpha) \rfloor / (a - 2\tilde{\alpha}) = R + o(1), \end{cases}$$

donde  $y_1$  e  $y_2$  são iguais a  $\alpha + \beta i + o(1)$  e  $\alpha - \beta i - o(1)$ , uma vez que  $\alpha + \beta i$  e  $\alpha - \beta i$  são raízes da equação  $x^2 - 2\alpha x + R = 0$ , pois satisfazem  $(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha$  e  $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = R$ . [+ 2 pontos]

6) Para cada inteiro positivo  $n$ , seja

$$X_n = \{-2n + 1, -2n + 3, \dots, -1, 1, \dots, 2n - 3, 2n - 1\}$$

o conjunto dos inteiros ímpares de módulo menor do que  $2n$ . Seja  $P_n \subset [x]$  o conjunto dos polinômios  $p$  de grau menor do que  $2n$  tais que  $|p(x)| \leq 1$  para todo  $x \in X_n$ . Seja  $g(n) = \max_{p \in P_n} p(0)$  o maior valor possível de  $p(0)$  para  $p \in P_n$ . Prove que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$$

existe e calcule-o.

**Solução:**

Dados os  $2n$  valores  $p(a)$ ,  $a \in X_n$ , o polinômio  $p(x) \in P_n$  que assume os valores  $p(a)$  para  $a \in X_n$  é determinado (por interpolação de Lagrange) pela expressão

$$(*) \quad p(x) = \sum_{a \in X_n} p(a) \cdot \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left( \frac{x - b}{a - b} \right). \quad [1 \text{ ponto}]$$

Assim, se  $|p(a)| \leq 1$  para todo  $a \in X_n$ , temos

$$p(0) \leq \sum_{a \in X_n} \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a - b} \right|,$$

valendo a igualdade se, para cada  $a \in X_n$ , escolhemos em (\*), para cada  $a \in X_n$ ,  $p(a) \in \{-1, 1\}$  com o mesmo sinal de  $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left( \frac{-b}{a-b} \right)$ . Portanto, temos

$$g(n) = \sum_{a \in X_n} \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right|.$$

[+ 1 ponto]

Queremos calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln(n)}$

Vamos então estimar os termos  $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right|$ , com  $a \in X_n$ . Temos  $X_n = \{2j-1, 1-n \leq j \leq n\}$ . Se  $a = 2j-1 \in X_n$ ,  $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right| = \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |b| / \prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |a-b|$ .

Temos  $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |b| = (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1))^2 / |2j-1| = \left( \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \right)^2 / |2j-1|$ , e  $\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} |a-b| = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2j+2n-2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2(n-j) = 2^{2n-1} (n+j-1)! (n-j)!$ . Assim,

$$\prod_{b \in X_n \setminus \{a\}} \left| \frac{b}{a-b} \right| = \frac{(2n)! (n+j) (2n)!}{(n+j)! (n-j)! 2^{4n-1} \cdot n!^2 |2j-1|} = \frac{n+j}{2^{4n-1} |2j-1|} \cdot \binom{2n}{n+j} \binom{2n}{n},$$

e portanto

$$g(n) = \sum_{1-n \leq j \leq n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n+j} \binom{2n}{n}.$$

Para estimar  $g(n)$ , notemos inicialmente que  $\binom{2n}{n}$  é (pela fórmula de Stirling ou por algum argumento equivalente) assintoticamente  $\frac{(2n)!}{n!^2} \approx \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$ .

[+ 1 ponto]

Note agora que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} &= \frac{n!^2}{(n+j)! (n-j)!} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+2} \cdot \dots \cdot \frac{n-j+1}{n+j} = \\ &= \prod_{r=1}^j \left( 1 - \frac{2r-1}{n+r} \right) \leq \exp \left( - \sum_{r=1}^j \frac{2r-1}{n+r} \right). \end{aligned}$$

Se  $j \geq \ln n \cdot \sqrt{n}$ ,

$$\sum_{r=1}^j \frac{2r-1}{n+r} \geq \frac{j^2}{n+j} \geq \frac{(\ln n \cdot \sqrt{n})^2}{n + \ln n \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{\ln^2 n}{2},$$

donde

$$\prod_{r=1}^j \left(1 - \frac{2r-1}{n+r}\right) \leq \exp\left(-\frac{\ln^2 n}{2}\right) < \frac{1}{n}, \quad \text{para } n \text{ grande.}$$

Como  $\binom{2n}{n+j} = \binom{2n}{n-j}$ , se  $j \leq -\ln n \cdot \sqrt{n}$  também temos  $\binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} < \frac{1}{n}$ , e logo  $\binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} < \frac{1}{n}$  sempre que  $|j| \geq \ln n \cdot \sqrt{n}$ . [+ 1 ponto]

Por outro lado, se  $|j| \leq \sqrt{n}/\ln n$ ,

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n+j} / \binom{2n}{n} &= \prod_{r=1}^{|j|} \left(1 - \frac{2r-1}{n+r}\right) = \prod_{r=1}^{|j|} \left(1 + \frac{2r+1}{n-r+1}\right)^{-1} \geq \\ &\geq \exp\left(-\frac{j^2}{n-j+1}\right) \geq \exp\left(-\frac{2}{\ln^2 n}\right) \geq 1 - \frac{2}{\ln^2 n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\left| \left( \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n}^2 \right) - g(n) \right| \leq \\ &\leq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n-1}} \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \left| \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} - \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n+j} \right| + \\ &+ \sum_{\frac{\sqrt{n}}{\ln n} < |j| \leq \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+j} + \\ &+ \sum_{n \geq |j| > \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n+j}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+j} \leq \\ &\leq \frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n-1}} \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \left| \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n} - \frac{n+j}{|2j-1|} \binom{2n}{n+j} \right| + \\ &+ \frac{2n}{2^{4n-1}} \binom{2n}{n}^2 \sum_{\frac{\sqrt{n}}{\ln n} < |j| \leq \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{|2j-1|} + \frac{n}{2^{4n-1} \cdot \sqrt{n}} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Temos que  $\sum_{\frac{\sqrt{n}}{\ln n} < |j| \leq \sqrt{n} \ln n} \frac{1}{|2j-1|}$  é da ordem de  $\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{n} \ln n}{\sqrt{n}/\ln n} \right) = \ln \ln n$

$$= o(\ln n), \text{ e } \left| n \cdot \binom{2n}{n} - (n+j) \binom{2n}{n+j} \right| \leq |j| \cdot \binom{2n}{n+j} + \frac{2n}{\ln^2 n} \binom{2n}{n}$$

$$\leq \left( \frac{\sqrt{n}}{\ln n} + \frac{2n}{\ln^2 n} \right) \binom{2n}{n} = o \left( n \binom{2n}{n} \right), \text{ para } |j| \leq \sqrt{n}/\ln n, \text{ donde}$$

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{4n-1}} \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \left| \frac{n}{|2j-1|} \binom{2n}{n} - \frac{n+j}{|2j-1|} \binom{2n}{n+j} \right| = o \left( \frac{n \cdot \binom{2n}{n}^2}{2^{4n-1}} \cdot \ln n \right),$$

pois  $\sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{|2j-1|} \leq \ln n$ . Portanto, mostramos que

$$\left| \left( \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n}^2 \right) - g(n) \right| = o \left( n \cdot \binom{2n}{n}^2 2^{4n-1} \cdot \ln n \right),$$

mas  $\binom{2n}{n}^2$  é assintoticamente  $\left( \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \right)^2 = \frac{2^{4n}}{n\pi}$ , donde  $o \left( n \cdot \binom{2n}{n}^2 2^{4n-1} \cdot \ln n \right) = o(\ln n)$ .

Por outro lado,

$$\sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{2^{4n-1}} \cdot \frac{n}{|2j-1|} \cdot \binom{2n}{n}^2 = \frac{n}{2^{4n-1}} \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \sum_{|j| \leq \sqrt{n}/\ln n} \frac{1}{|2j-1|}$$

é assintoticamente  $\frac{n}{2^{4n-1}} \cdot \frac{2^{4n}}{n\pi} \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \right)$ , que é assintoticamente  $\frac{\ln n}{\pi}$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\ln n} = \frac{1}{\pi}. \quad [+ 3 \text{ pontos}]$$

7) Seja  $\mathcal{S} = \{-1, 1\}$  o conjunto de todas as seqüências com valores 1 e -1. Para  $p, q \in \mathcal{S}$ , definimos

$$p \perp q \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$

Mostre que existe  $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  tal que se  $p \neq q$  então  $f(p) \perp f(q)$ .

**Solução:**

Seja  $\delta(j, i) = \left\lfloor \frac{j}{2^i} \right\rfloor \bmod 2$ . Note que  $\delta(j, i) = 0$  se  $i > \log_2 j$ . Defina

$$(f(p))(k) = \prod_{0 \leq i \leq \log_2 k} (p(i))^{\delta(k, i)}.$$

Sejam  $p, q \in \mathcal{S}$ ,  $p \neq q$ . Seja  $a$  o menor inteiro tal que  $p(a) \neq q(a)$ . Afiramos que, para todo inteiro positivo  $b$ ,

$$\sum_{2^{a+1} \cdot b \leq k < 2^{a+1}(b+1)} (f(p))(k) (f(q))(k) \stackrel{(*)}{=} 0.$$

De fato, vamos provar que se  $2^{a+1}b \leq j < 2^{a+1}b + 2^a$  então

$$(f(p))(j) (f(q))(j) \stackrel{(**)}{=} -(f(p))(j + 2^a) \cdot (f(q))(j + 2^a).$$

Ora,

$$\begin{aligned} (f(p))(j) &= \prod_i (p(i))^{\delta(j, i)} \\ (f(p))(j + 2^a) &= \prod_i (p(i))^{\delta(j+2^a, i)} \\ &= p(a) \cdot (f(p))(j). \end{aligned}$$

Analogamente

$$(f(q))(j + 2^a) = q(a) \cdot (f(q))(j).$$

Como  $p(a)q(a) = -1$ , temos a igualdade (\*\*), donde (\*). De (\*), temos

$$\sum_{k < n} (f(p))(k) (f(q))(k) = \sum_{2^{a+1} \lfloor \frac{n}{2^{a+1}} \rfloor \leq k < n} (f(p))(k) (f(q))(k) \leq 2^{a+1}$$

e portanto

$$\sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} \leq \frac{2^{a+1}}{n}$$

donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < n} \frac{p(k)q(k)}{n} = 0.$$