

# XXI Olimpíada Cearense de Matemática

Ensino Fundamental – 25 de Agosto de 2001

- (1) O número  $a$  é média aritmética de três números, e  $b$  é média aritmética de seus quadrados. Expresse a média aritmética de seus produtos dois a dois em termos de  $a$  e  $b$ .

(Obs: A média aritmética dos números  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definido como:  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ )

- (2) Um comerciante possui para vender 2001 bilas (bolas de gude) e deseja distribuí-las em 11 sacos a serem lacrados, de modo que o primeiro cliente que queira comprar bilas possa ser atendido sem que seja necessário abrir nenhum dos sacos lacrados, bastando apenas levar os sacos de bilas apropriados. Como fazer a distribuição das bilas nos sacos se o primeiro cliente pode pedir qualquer quantidade de bilas menor ou igual a 2001?

- (3) Achar todos os números  $x, y$  tais que  $(1 - x)^2 + (x - y)^2 + y^2 = \frac{1}{3}$ .

- (4) Demonstre que a bissetriz do ângulo reto de um triângulo é também bissetriz do ângulo formado pela altura e pela mediana relativa à hipotenusa deste triângulo.

- (5) No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:

–*Marcondes*: estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior;

Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversação.

–*Francisco*: não sei o número que Fernando recebeu;

–*Fernando*: não sei o número que Francisco recebeu;

–*Francisco*: não sei o número que Fernando recebeu;

–*Fernando*: não sei o número que Francisco recebeu;

–*Francisco*: não sei o número que Fernando recebeu;

–*Fernando*: não sei o número que Francisco recebeu;

–*Francisco*: agora eu sei o número que o Fernando recebeu;

–*Fernando*: agora eu também sei o número que Francisco recebeu;

Quais os números recebidos por cada um deles?

- (6) Sejam  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  trinômios do segundo grau tais que cada número  $1, 2, 3, \dots, 21$  é raiz de, pelo menos, uma equação  $P_i(x) = P_j(x)$ , com  $1 \leq i \leq 5$ . Mostre que entre os cinco trinômios acima existem, pelo menos, dois iguais.

# XXI Olimpíada Cearense de Matemática

Ensino Médio – 25 de Agosto de 2001

- (1) Suponha que a função  $f: R \rightarrow R$  satisfaz  $f(xy) = xf(y) + yf(x)$  para todos  $x, y \in R$ . Prove que  $f(1) = 0$  e que  $f(u^n) = nu^{n-1}f(u)$  para todo  $n$  natural e todo  $u$  real.
- (2) Se  $p > 3$  é primo, prove que o resto da divisão de  $p^2$  por 12 é igual a 1.
- (3) <sup>1</sup> Num trapézio  $ABCD$ ,  $AB$  é a base maior e,  $CD$  a menor. Se  $\overline{BC} = 2\overline{AD}$  e se ainda a soma dos ângulos  $\hat{DAB}$  e  $\hat{ABC}$  é  $120^\circ$ , prove que um desses ângulos é reto.
- (4) Sejam  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2001}(x)$  polinômios a coeficientes reais. Para cada inteiro positivo  $n$  existe um par  $(i, j)$  com  $1 \leq i < j \leq 2001$  tal que  $n$  é raiz da equação  $f_i(x) = f_j(x)$ . Mostre que entre os 2001 polinômios acima existem pelo menos dois iguais.
- (5) Achar o menor natural  $n$  tal que 2001 é a soma dos quadrados de  $n$  inteiros ímpares. Justifique sua solução.
- (6) Determinar  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ , sabendo-se que:
  - i) são números em progressão geométrica, nesta ordem;
  - ii)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  possuem quatro dígitos e  $a_{10}$  possui cinco dígitos(OBS.: todos os números  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$  estão na base 10)