

THE 4th ROMANIAN MASTER OF MATHEMATICS COMPETITION

DIA 2: SÁBADO, 26 DE FEVEREIRO DE 2011, BUCARESTE

Language: Portuguese

Problema 4. Dado um inteiro positivo $n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i}$, seja $\Omega(n) = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ o total de fatores primos de n , contados com multiplicidade. Seja também $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (por exemplo, $\lambda(12) = \lambda(2^2 \cdot 3^1) = (-1)^{2+1} = -1$).

Prove as seguintes afirmações:

- i) Existem infinitos inteiros positivos n tais que $\lambda(n) = \lambda(n+1) = +1$;
- ii) Existem infinitos inteiros positivos n tais que $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$.

Problema 5. Para todo $n \geq 3$, determine todas as configurações de n pontos distintos X_1, X_2, \dots, X_n do plano com a seguinte propriedade: para qualquer par de pontos distintos X_i, X_j , existe uma permutação σ dos inteiros $\{1, \dots, n\}$ tal que $d(X_i, X_k) = d(X_j, X_{\sigma(k)})$ para todo $1 \leq k \leq n$. ($d(X, Y)$ denota a distância euclidiana entre os pontos X e Y .)

Problema 6. As casas de um tabuleiro 2011×2011 são numeradas com os inteiros $1, 2, \dots, 2011^2$, de modo que cada número é usado exatamente uma vez. Identificamos as arestas direita e esquerda e depois as arestas inferior e superior, da maneira usual a formar um toro (a superfície de uma rosquinha).

Determine o maior inteiro positivo M para o qual, independente de como numeramos as casas, sempre existem duas casas vizinhas tais que a diferença entre seus números é pelo menos M .*

Cada problema vale 7 pontos.

Tempo: $4\frac{1}{2}$ horas.

*Duas casas (x, y) e (x', y') são ditas vizinhas se $x = x'$ e $y - y' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$, ou $y = y'$ e $x - x' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$.