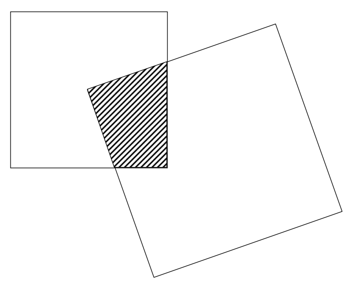
XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 1 (5ª ou 6ª Séries)

PROBLEMA 1:
Quantos inteiros positivos menores que 1000 têm a soma de seus algarismos igual a 7?

PROBLEMA 2:
Considere as seqüências de inteiros positivos tais que cada termo mais a soma dos seus algarismos é igual ao termo seguinte. Por exemplo: 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39 é uma seqüência nessas condições.
Escreva a maior seqüência cujo último termo é 103 e que satisfaz tais condições.
Observação: maior seqüência é aquela com o maior número de termos.

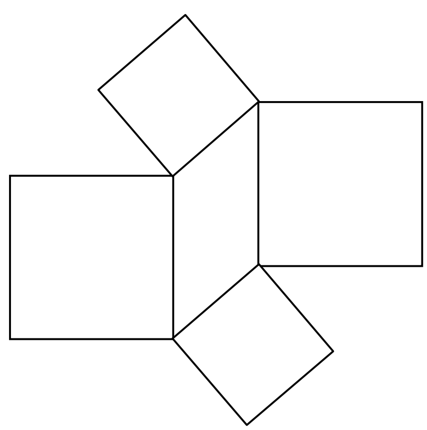
PROBLEMA 3:
Os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,… são potências de 2.
Deseja-se dividir um quadrado de lado 2003 em outros quadrados cujos lados são potências de 2. Mostre uma maneira de se fazer a divisão e obter 6364 quadrados cujos lados são potências de 2.

PROBLEMA 4:
a) Dois quadrados estão posicionados de modo que o centro do primeiro é vértice do segundo, como mostra a figura abaixo.



Se o lado do primeiro quadrado mede 12cm, quanto mede a área comum aos dois quadrados?

b) Na figura a seguir, o paralelogramo tem lados de medida 12cm e 4cm e área 40cm^2. Sejam P, Q, R e S os centros dos quadrados construídos externamente sobre os quatro lados desse paralelogramo. Sabendo que o quadrilátero $PQRS$ é um quadrado, calcule a sua área.



PROBLEMA 5:
Queremos construir o perímetro de um retângulo utilizando 2003 varetas cujas medidas são inteiros positivos. Para isso às vezes teremos de quebrar algumas delas, mas todas as varetas e pedaços de varetas devem ser utilizados na construção do retângulo.

a) Mostre que com uma única quebra nem sempre é possível construir o retângulo.
b) Mostre que com duas quebras sempre é possível construir o retângulo.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª ou 8ª Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Num tabuleiro 2×2, como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$.

A	***B***
C	***D***

a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?
b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

PROBLEMA 2:

Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x.

PROBLEMA 3:

O triângulo ABC está inscrito na circunferência S e $AB < AC$. A reta que contém A e é perpendicular a BC encontra S em P ($P \neq A$). O ponto X situa-se sobre o segmento AC e a reta BX intersecta S em Q ($Q \neq B$).

Mostre que $BX = CX$ se, e somente se, PQ é um diâmetro de S.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª ou 8ª Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Mostre que $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 2 > 0$, quaisquer que sejam os reais x e y.

PROBLEMA 5:

São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

PROBLEMA 6:

Há N cidades na Tumbólia. Cada duas cidades desse país são ligadas por uma rodovia ou uma ferrovia, não existindo nenhum par de cidades ligadas por ambos os meios.

Um turista deseja viajar por toda a Tumbólia, visitando cada cidade exatamente uma vez, e retornar a cidade onde ele começou sua jornada.

Prove que é possível escolher a ordem na qual as cidades serão visitadas de modo que o turista mude o meio de transporte no máximo uma vez.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x.

PROBLEMA 2:

Seja S um conjunto de n elementos. Determine o menor inteiro positivo k com a seguinte propriedade: dados quaisquer k subconjuntos distintos $A_1, A_2, ..., A_k$ de S, existe uma escolha adequada dos sinais + e – de modo que $S = A_1^{\pm} \cup A_2^{\pm} \cup ... \cup A_k^{\pm}$, onde $A_i^+ = A_i$ e $A_i^- = S - A_i$ é o complementar de A_i em relação a S.

PROBLEMA 3:

Seja $ABCD$ um losango. Sejam E, F, G e H pontos sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, e tais que as retas EF e GH são tangentes à circunferência inscrita no losango.
Prove que as retas EH e FG são paralelas.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
São dados: uma circunferência K e um ponto A interior, fixo, distinto do centro. Determine os pontos B, C e D sobre a circunferência de forma que a área do quadrilátero $ABCD$ seja a maior possível.

PROBLEMA 5:
Suponha que $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ satisfaz:

i) $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

ii) $f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right)\geq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, para todo $x,y\in(0,+\infty)$.

Prove que existe $x_0\in(0,+\infty)$ tal que $f(x_0)<0$.

PROBLEMA 6:
Um grafo cujo conjunto de vértices V tem n elementos é *bacana* se existir um conjunto $D\subset\mathbb{N}$ e uma função injetiva $f:V\to\left[1,n^2/4\right]\cap\mathbb{N}$ tal que os vértices p e q são ligados por uma aresta se e somente se $\left|f(p)-f(q)\right|\in D$.
Mostre que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq n_0$ existem grafos com n vértices que não são bacanas.

Observação: Um grafo com conjunto de vértices V é um par (V, E) onde E é um conjunto de subconjuntos de V, todos com exatamente dois elementos.
Um conjunto $\{p, q\}$ é chamado de *aresta* se pertencer a E e neste caso dizemos que esta aresta liga os vértices p e q.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
São dados uma parábola e um ponto A fora dela. Para cada ponto P da parábola, seja t a tangente à parábola por P e r a reta paralela ao eixo da parábola por P. A reta perpendicular a t por A corta r em Q. Prove que, ao variar P, o ponto Q percorre uma hipérbole equilátera.

PROBLEMA 2:

a) Sejam p e $q \in \mathbb{C}[x]$ polinômios primos entre si com coeficientes complexos. Suponha que existam 4 vetores $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, dois a dois linearmente independentes (sobre $\mathbb{C}$), tais que $ap + bq$ é o quadrado de um polinômio em $\mathbb{C}[x]$. Prove que p e q são constantes.

b) Prove que não existem polinômios não constantes $r, s, t, u \in \mathbb{C}[x]$ tais que $f = \dfrac{r}{s}$, $g = \dfrac{t}{u}$ e $f^2 = g(g-1)(g-a)$, onde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

PROBLEMA 3:
Seja $p > 2$ um número primo.
Seja X_p o conjunto de todas as matrizes quadradas A com coeficientes em $\mathbb{Z}/(p)$ e de ordem 4 para as quais $A^2 = I$: $X_p = \left\{ A \in (\mathbb{Z}/(p))^{4\times 4} \,\middle|\, A^2 = I \right\}$
Calcule o número de elementos de X_p.

Observação: $\mathbb{Z}/(p) = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ é o corpo finito com p elementos. A soma e o produto são definidos módulo p; assim, por exemplo, em $\mathbb{Z}/(7)$, $4 + 5 = 2$ e $4 \cdot 5 = 6$.

XXV OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
SEGUNDA FASE – NÍVEL UNIVERSITÁRIO
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Temos um dado de 6 faces, não necessariamente honesto. Jogamos o dado três vezes e obtemos resultados *a*, *b* e *c*. Prove que $P(a=c \mid a=b) \geq P(a=c \mid a \neq b)$ e que vale a igualdade se e somente se o dado é honesto.

Observação: $P(a=c \mid a=b)$ é a probabilidade condicional

$$P(a=c \mid a=b) = \frac{P(a=b=c)}{P(a=b)}.$$

Um dado é honesto se a probabilidade de cada face é $\frac{1}{6}$.

PROBLEMA 5:

Uma função $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$ de classe C^{∞} é *bacana* se existem um inteiro positivo *n* e polinômios $P_j \in \mathbb{R}[t],\ 0 \leq j \leq n,$ com P_n não identicamente nulo tais que $\sum_{j=0}^{n} P_j(t) f^{(j)}(t) = 0,$ para todo $t \in (-1,1).$ Prove que se *f* e *g* são bacanas então $f+g$ e $f \cdot g$ também são bacanas.

Observação: Definimos $f^{(0)} = f$ e, para cada inteiro $m \geq 0,\ f^{(m+1)} = (f^{(m)})'.$

PROBLEMA 6:

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz tal que $a_{ij} \in \{0,1\},$ para quaisquer i, j e $\left|\{(i,j) \mid a_{ij} = 1\}\right| \geq \frac{99}{100} \cdot n^2.$

Prove que $tr(A^k) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k,$ para todo $k \geq 2.$

Observação: Se $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz quadrada então $tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ denota o traço de *B*.