0,999... OU "COMO COLOCAR UM BLOCO QUADRADO EM UM BURACO REDONDO"

Pablo Emanuel

- Nível Intermediário

Quando um jovem estudante de matemática começa a estudar os números reais, é difícil não sentir certo desconforto e estranhamento. De repente, algumas coisas que faziam sentido param de funcionar tão bem assim. Com certeza, uma das mais estranhas pode ser resumida na igualdade

$$0,9999..... = 1,0000...$$

Como assim? No mundo dos números inteiros (com a exceção muito razoável de 0 = –0), qualquer número tem uma única representação decimal (os zeros à esquerda não são um problema sério, ou definimos que nunca podemos começar com 0 – o que deixa o próprio zero em uma situação meio desconfortável de ter uma representação decimal vazia – ou definimos que sempre vamos completar com infinitos zeros à esquerda), e esta se comporta bem – i.e. qualquer número da forma 8*xxxxxxx* é menor que qualquer número da forma 9*yyyyyyy* com o mesmo número de dígitos. Como pode haver um número começado por 0,9 que não seja menor que um número começado por 1,0 e, pior, que seja igual!? A resposta explica, mas não convence: se definirmos as seqüências:

$a_n =$ 0.999999...9 (n dígitos 9) e
$b_n =$ 1.000000...0 (n dígitos 0)

temos que $a_n < 0.999... \Leftarrow 1.000... < b_n$. No entanto, como $b_n - a_n = 1/10^n$, que converge para 0, a diferença entre 1.000... e 0.999..., que é menor que qualquer das diferenças $b_n - a_n$ só pode ser 0, logo os números são iguais.

OK, entendido, mas ainda tem caroço neste angu. Por que a representação decimal, que se comporta tão bem para números inteiros tem este tipo de esquisitice para números reais? A verdade é que usar a representação decimal para números reais é enfiar um bloco quadrado em um buraco redondo.

Em primeiro lugar, até agora estamos usando a representação decimal (base 10) apenas porque é a representação com que estamos mais acostumados. Será que o problema está com o número 10? Infelizmente não. Mesmo que usemos outras bases, o problema continua:

0,1111.... = 1,000.... em base 2
0,2222... = 1,000... em base 3

e o mesmo problema acontece em qualquer base que escolhamos (e a demonstração é exatamente a mesma, *mutatis mutandis*, que fizemos lá em cima).

Antes de entrarmos a fundo em por que a representação decimal (ou em qualquer base N) tem estes problemas, é bom ver que outras opções nós temos para representar os números reais. Em primeiro lugar, nossas notações foram feitas para trabalhar com números inteiros, que é o que nos é familiar (a ponto de Pitágoras afirmar que os números inteiros são a fundação do universo). Dos números inteiros conseguimos de forma natural derivar os números racionais (os números da forma a/b, onde a e b são inteiros). O pulo para os números reais irracionais, no entanto, é menos natural, e as únicas maneiras que temos para tentar nomear os números irracionais são através das aproximações por números racionais. A própria representação decimal é a aproximação por números racionais da forma $A/10^n$ (ou A/N^n, em base N). Duas outras formas de representar os números reais são as frações contínuas e os cortes de Dedekind.

A representação por frações contínuas tem a forma

$$N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \dots}}$$

O algoritmo para construir a representação por frações contínuas de um número x é bastante simples. Em primeiro lugar, N_1 é a parte inteira de x (i.e. o maior número inteiro que é menor ou igual a x). Se $x - N_1 = 0$, acabou, senão, $x - N_1$ é maior que 0 e menor que 1, portanto $y = 1/(x - N_1)$ é um número maior que 1. Seja N_2 então a parte inteira deste número, o que equivale a dizer que $1/(N_2 + 1) < x - N_1 \leq 1/N_2$. Agora repita o processo com y no lugar de x (i.e. N_3 é o número tal que $1/(N_3 + 1) < y - N_2 \Leftarrow 1/N_3$), e assim por diante até chegar a um número inteiro ou continuando para sempre.

A representação por frações contínuas não tem o mesmo problema da representação decimal (cada número real tem uma e somente uma representação por frações contínuas), mas tem outros inconvenientes. O primeiro, que não é tão sério assim, é que os números N_i, que seriam equivalentes aos dígitos, podem ser arbitrariamente grandes, ao contrário dos dígitos decimais que só podem ser de 0 a 9. O segundo, muito mais sério, é que é terrivelmente difícil fazer contas com frações contínuas. Este foi o principal motivo de a representação decimal ter substituído a numeração romana na Europa no século XV – era imensamente mais simples fazer contas com a representação decimal do que com a representação romana. (E este também é o principal motivo de a representação binária ter tomado espaço da representação decimal no século XX, é ainda mais fácil fazer contas em binário).

Outra representação dos números reais é através dos cortes de Dedekind. A diferença do corte de Dedekind para a representação decimal ou de frações contínuas é que, enquanto as últimas usam uma seqüência convergente de números racionais, os cortes usam conjuntos sem uma seqüência definida.

Um corte de Dedekind é um conjunto de números racionais limitado, que não possui um maior elemento e fechado inferiormente. Ou seja, um conjunto de racionais A tal que:

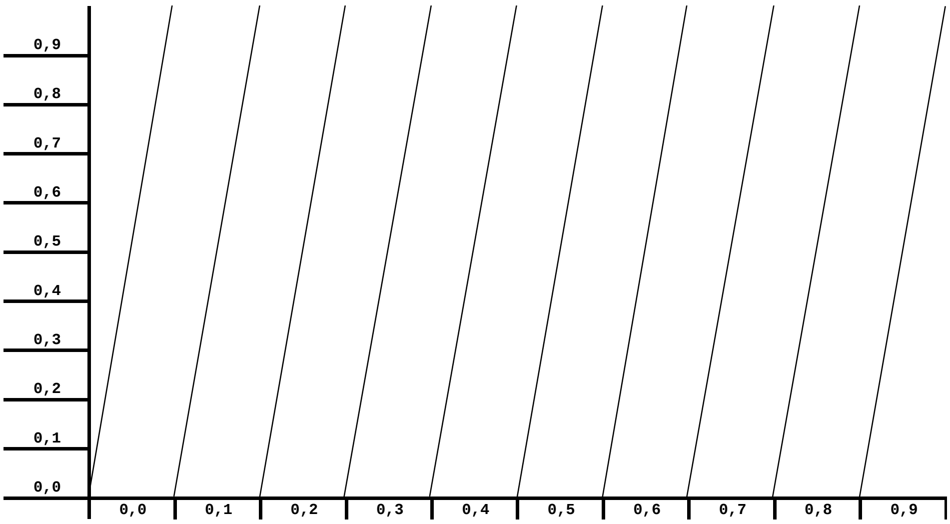
1) existe um racional $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{X} > \boldsymbol{a}$ para todo a pertencente a $\boldsymbol{A}$
2) para todo $\boldsymbol{a}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$, existe um $\boldsymbol{b}$ pertencente a $\boldsymbol{A}$ tal que $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$.
3) Se $\boldsymbol{a}$ pertence a $\boldsymbol{A}$, e um racional $\boldsymbol{c} < \boldsymbol{a}$, então $\boldsymbol{c}$ pertence a $\boldsymbol{A}$.

Em outras palavras, cada um destes conjuntos é o conjunto de todos os números racionais menores que um número real determinado.
Esta representação é útil teoricamente para provar algumas propriedades dos números reais, mas é praticamente impossível de ser utilizada na prática para as tarefas corriqueiras do dia-a-dia.

A conclusão é que, apesar dos seus defeitos, a representação de base N é a representação mais prática que temos para os números reais. Então vamos entendê-la mais a fundo.

Em primeiro lugar, a parte antes da vírgula (ou ponto decimal, dependendo de em qual lugar do mundo você vive) é apenas a parte inteira do número, com a nossa velha e bem comportada representação decimal de números inteiros. Vamos nos concentrar então na parte à direita da vírgula, os números entre 0 e 1.

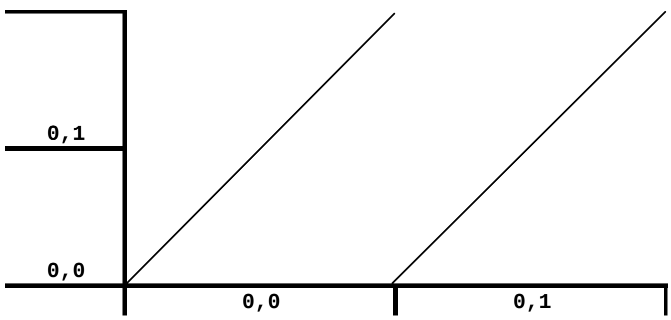
O primeiro dígito decimal diz em qual dos dez intervalos acima o número está. Para descobrir o segundo dígito, basta subdividir cada intervalo novamente em 10 pedaços, ou, equivalentemente, multiplicar o número por 10 e ver em qual dos intervalos a parte fracionária deste novo número ($10x$) cai, de acordo com o gráfico abaixo:



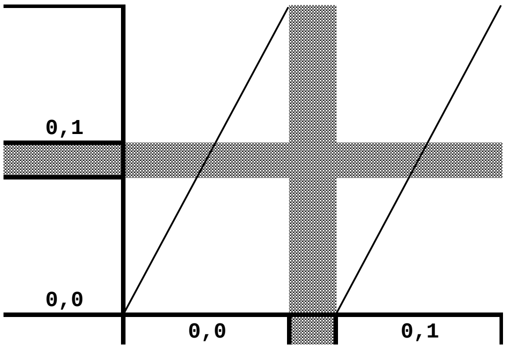
Os pontos onde nasce o nosso problema são justamente estes pontos marcados na nossa linha (0; 0,1; 0,2; ...; 1). Repare que o gráfico acima é descontínuo nestes pontos – por exemplo, as imagens dos pontos se aproximando de 0,2 pela esquerda tendem a 1, enquanto pela direita tendem a 0. Dito de outra forma, os números se aproximando pela esquerda de 0,2 vão ter uma seqüência longa de 9's depois do 0,1 e pela direita uma seqüência longa de 0's depois do 0,2.

Antes de prosseguir com a análise, já vimos que não existe nada de especial no número 10, portanto, por pura preguiça, a partir de agora vou mudar para base 2, mas deixo ao leitor desconfiado a tarefa de reescrever tudo o que se segue em base 10.

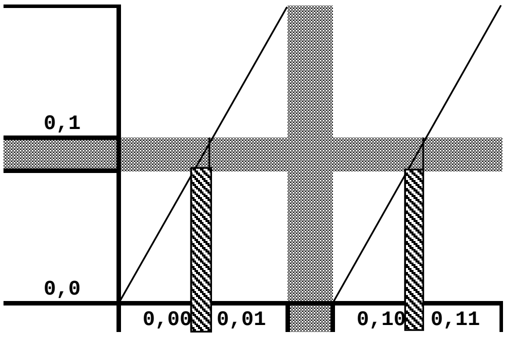
Apenas para começar do ponto onde paramos, o gráfico acima para base 2 fica assim:



Relembrando, o problema está no ponto da descontinuidade, neste caso o 0,1 (também conhecido como ½). A origem do problema é o fato de haver números começados por 0,0 arbitrariamente próximos de 0,1, quando, naturalmente, números começados por 0,0 deveriam ser distintamente menores do que 0,1. Vamos tentar corrigir este problema dando um pequeno espaço entre os intervalos no nosso desenho.



Vamos passar agora para o segundo dígito.



O espaço que demos entre os intervalos do primeiro dígito naturalmente se propaga para o segundo dígito (senão teríamos o mesmo problema nos números 0,01 – ¼ - e 0,11 – ¾). [Em base 10 seriam 9 buracos na primeira rodada e 90 na segunda, entenderam a minha preguiça?]

Neste ponto, já não é difícil imaginar o processo para o terceiro dígito – criar mais um buraco no meio de cada um dos 4 intervalos restantes, e assim por diante.

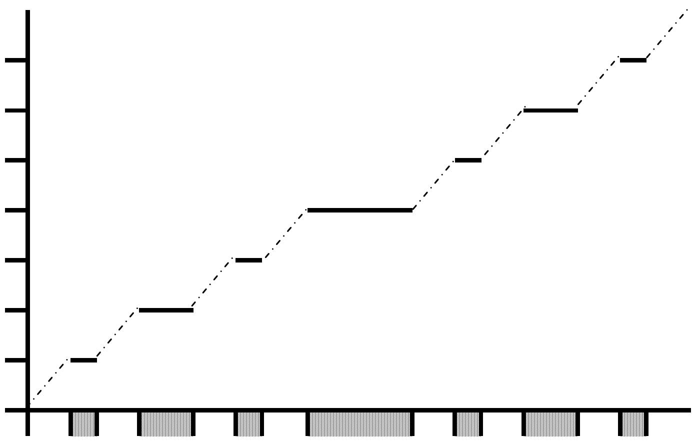
O conjunto dos números que sobram depois de fazermos este processo infinitas vezes é um conjunto em que podemos usar a nossa representação de base 2 (ou base 10, se fizermos o processo no desenho original lá de cima) sem medo – cada número tem apenas uma representação, e elas respeitam a ordem e as distâncias que esperaríamos: por exemplo, se um número começa por 0,11010 ele é estritamente menor que qualquer número que comece por 0,11011. O único problema é que o conjunto que temos no final deste processo é tão esfarelado que ele não contém nem um intervalinho que seja. Se escolhêssemos um número entre 0 e 1 aleatoriamente, ele teria 0% de chance de estar no nosso conjunto – repare que eu disse 0% não uma em um quaquilhão elevado a um googleplex, não a chance de ganhar na megasena todas as semanas pelo resto da vida, mas zero!

Este conjunto é tão importante que tem um nome – conjunto de Cantor, em homenagem ao matemático Georg Cantor que, entre outras coisas criou a teoria dos conjuntos (todos os conjuntos então são um pouquinho conjuntos de Cantor) e provou que existiam mais números irracionais do que números racionais. Dado que acabamos de ver que o próprio sistema de representação decimal que usamos todos os dias na verdade é um conjunto de Cantor, é de se admirar que apenas no final do século XIX tenhamos passado a conhecê-lo.

Pelo que acabamos de ver, o nosso sistema de numeração é um mapeamento entre um conjunto de Cantor e o intervalo [0,1]. O cerne da nossa questão é que esta função não é injetiva, ou seja, existem elementos distintos ***a*** e ***b*** no conjunto de Cantor que são mapeados para o mesmo número real (***a*** diferente de ***b***, ***f***(***a***) = ***f***(***b***)), por exemplo, 0,19999... e 0,2. [Parênteses: outra forma de ver isto é afirmar que o intervalo [0,1] é o espaço quociente do conjunto de Cantor pela relação de equivalência entre os números terminados por 999... e os seus correspondentes terminados por 000..., ver o artigo Egalité] no endereço:

http://www.impa.br/~gugu/pablo-egalite.doc

Vamos tentar desenhar o gráfico desta função:



Os dois extremos do buraco do meio são os pontos 0,01111.... e 0,10000... que representam o mesmo número ½, portanto a função é constante igual a ½ neste intervalo. Da mesma forma cada um dos buracos de "gerações" maiores corresponde a diferentes platôs no gráfico. O mais surpreendente é que, depois de criarmos os infinitos platôs, o gráfico final é um gráfico contínuo, que é chamado de função de Cantor, ou de "escada do diabo" (porque sempre existem infinitos degraus entre quaisquer dois degraus da escada, você nunca conseguiria sair do lugar – assim como Aquiles correndo atrás da tartaruga). Infelizmente, é o que se tem quando se tenta botar um bloco quadrado em um buraco redondo, ou neste caso, botar um intervalo dentro de um conjunto de Cantor.