GRAFOS E CONTAGEM DUPLA

Carlos Yuzo Shine, Colégio Etapa

♦ Nível Intermediário.

1. GRAFOS

1.1 O que são e para que servem grafos?

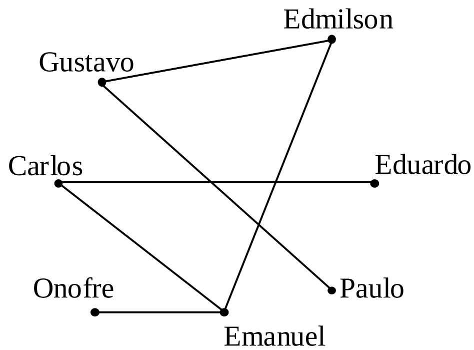
Define-se grafo como o par (V, A) onde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto de vértices e $A \subset \{\{v_i, v_j\}$ t.q. $v_i, v_j \in V, i \neq j\}$ é um conjunto de arestas (na verdade, uma aresta é um par não-orientado de vértices).

A representação mais comum de grafos é associar os vértices a pontos e as arestas a linhas que ligam os pares de vértices que as formam.

Mas o mais importante é que os grafos podem representar inúmeras situações. Por exemplo, quando você brinca de ligar os pontos, no fundo você está traçando arestas em um grafo onde os vértices são dados (em vez de "ligue os pontos", poderíamos escrever "areste o grafo"...).

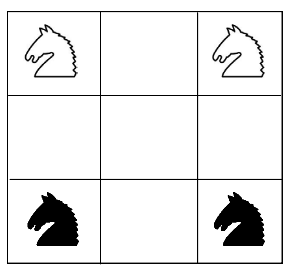
Embora pareçam simples, os grafos têm muito mais utilidades, como veremos. Na verdade, a *Teoria dos Grafos* é uma das partes mais importantes da Matemática, e é muito utilizada principalmente em computação.

Exemplo 1.1
Podemos construir um grafo que represente pessoas apertando mãos. Os vértices seriam as pessoas. Ligamos dois vértices (formando assim uma aresta) se duas pessoas se cumprimentaram.

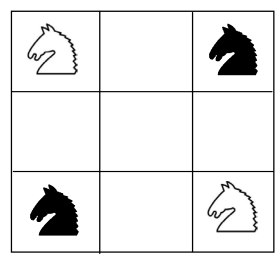


Exemplo 1.2

É possível que os cavalos do tabuleiro (I) fiquem na posição do tabuleiro (II) ?

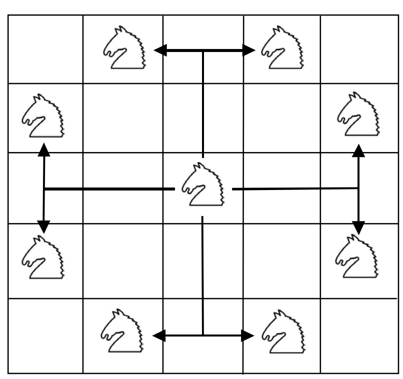


(I)



(II)

Observação: um cavalo, no xadrez, se movimenta da seguinte forma: ele se move duas casas na vertical ou horizontal e depois se move uma casa na direção perpendicular à direção em que havia se movimentado antes.

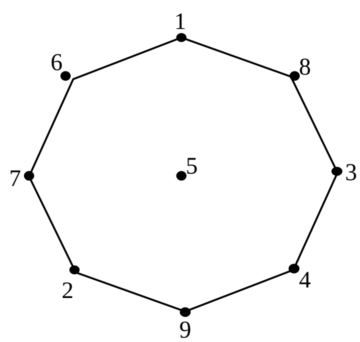


Resolução

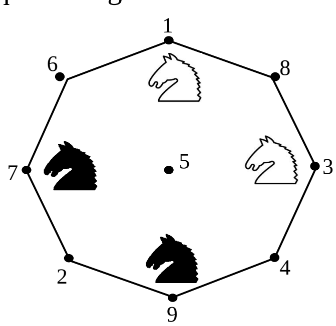
Vamos numerar as casas do tabuleiro da seguinte forma:

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

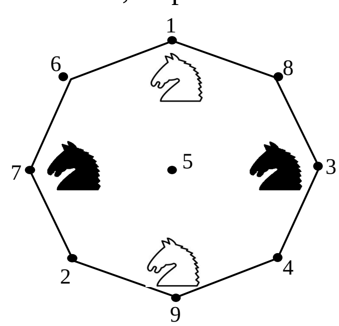
Vamos construir um grafo onde os vértices são as casas do tabuleiro. Ligaremos dois vértices *i* e *j* se é possível um cavalo ir da casa *i* à casa *j*. Temos então o seguinte grafo (verifique!).



Coloquemos agora os cavalos nas situações inicial e final, respectivamente:



Inicial



Final

Observe que não podemos ter dois cavalos na mesma casa, assim os cavalos devem sempre estar na mesma ordem no ciclo. Logo não é possível chegar na posição final.

Exercícios

01. (IMO) Considere um inteiro positivo r e um retângulo de dimensões $|AB| = 20,\ |BC| = 12.$ O retângulo é dividido em uma grade de 20 × 12 quadrados unitarios. Uma moeda pode ser movida de um quadrado a outro se, e somente se, a distância entre os centros dos quadrados é $\sqrt{r}$. A tarefa é encontrar uma seqüência de movimentos que levem uma moeda do quadrado que tem A como vértice ao quadrado que tem B como vértice.

a) Mostre que a tarefa não pode ser feita se r é divisível por 2 ou 3.
b) Prove que a tarefa pode ser feita se $r = 73$.
c) Pode a tarefa ser feita quando $r = 97$?

Dicas: Para o item a), use o fato de que um quadrado perfeiro pode deixar somente os restos 0 ou 1 quando divididos por 3 ou 4. Para os itens b) e c), construa dois grafos: um que considera a posição da moeda na horizontal e outro na vertical.

1.2. Grau de vértice

Definimos *grau de vértice* v_i como o número de arestas que contêm v_i e denotamos $d(v_i)$. No último exemplo, o grau de um vértice seria o número de apertos de mão que a pessoa correspondente deu.

Exemplo 1.3.

Na cidade de Micrópolis, há 7 telefones. Um candidato a prefeito prometeu que ampliaria a rede de telefonia de modo que cada um dos 7 telefones esteja conectado diretamente a exatamente 5 outros telefones. É possível que ele cumpra sua promessa?

Resolução

Se imaginarmos um grafo onde os vértices são os telefones e as arestas, as conexões, teríamos que o grau de cada vértice seria 5.

Vamos contar o número de conexões entre dois telefones (ou seja, o número de arestas do grafo). Como de cada telefone sairiam 5 conexões, teríamos a princípio 5.7 = 35 conexões; mas contamos cada conexão duas vezes, uma vez em cada um dos dois telefones a que ele está conectado. Assim, deveríamos ter na verdade 35/2 conexões, o que seria um absurdo. Assim, o candidato a prefeito não pode cumprir sua promessa (não votem nele!!).

Este exemplo mostra

1.3. Um teorema importante

Teorema. *Em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos: no grafo* (V, A),

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|A|$$

($|X|$ *denota o número de elementos do conjunto* X.)

Demonstração

De cada vértice v saem $d(v)$ arestas. Assim, se somarmos os graus de todos os vértices, obtemos o número de arestas multiplicado por dois, pois contamos cada aresta duas vezes (lembre-se de que cada aresta está associada a dois vértices).

2. Contagem Dupla

O que acabamos de fazer foi contar algo de duas maneiras diferentes, no caso o número de arestas (na verdade, o seu dobro). Esta idéia de contar duas vezes é às vezes muito útil para demonstrar algumas relações.

Exemplo 2.1.

(Combinações) De quantos modos podemos escolher k elementos dentre n disponíveis?

Importante: Tal número é representado por $\binom{n}{k}$ – lê-se n escolhe k ou combinação de n k a k.

Resolução

Vamos contar de duas maneiras o número de **filas** com os k elementos escolhidos. Podemos (i) primeiro escolher os k elementos e colocá-los em filas ou (ii) escolher diretamente os elementos e irmos colocando na fila.

Fazendo como em (i), temos $\binom{n}{k}$ maneiras de escolhermos os elementos; podemos escolher o primeiro da fila de k maneiras, o segundo de $k – 1$ maneiras, e assim por diante. Assim temos

$$\binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \binom{n}{k} \cdot k!$$

maneiras de formar a fila. (*lembrete:* $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k!$ – lê-se k *fatorial*).

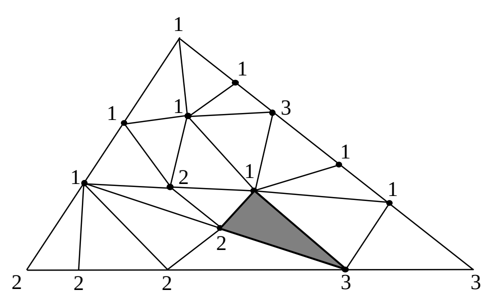
Por outro lado, fazendo como em (ii), temos n maneiras de escolher o primeiro da fila, $n – 1$ maneiras de escolher o segundo e assim por diante, até o último, que pode ser escolhido de $n – k + 1$ maneiras. Assim, temos $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ maneiras de formar a fila. Logo, de (i) e (ii), concluímos que

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \text{número de filas} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

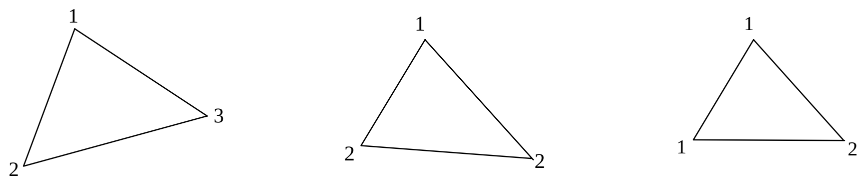
Exemplo 2.2.

(Lema de Sperner) Dividimos um triângulo grande 123 em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum ou tem um lado (completo) em comum. Os vértices dos triângulos são numerados: 1, 2 ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre os vértices do triângulo maior oposto ao vértice i não podem receber o número i. Mostre que entre os triângulos menores existe um com os vértices 1, 2, 3.



Resolução

Contaremos o número de segmentos $\overline{12}$ (com algumas repetições). Eles aparecem nos triângulos



Digamos que há x triângulos 123, y triângulos 122 e z triângulos 112. Observe que os segmentos $\overline{12}$ internos ao triângulo grande são contados duas vezes (eles são comuns a dois triângulos) e os segmentos do lado do triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{12}$ aparecem duas vezes nos triângulos 122 e 112 e uma vez nos triângulos 123. Assim,

$$2 \textbf{ segmentos interiores} + \textbf{segmentos nos lados} = \textbf{ número de segmentos} = x + 2y + 2z$$

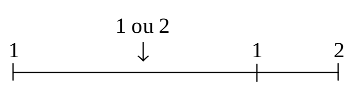
Mostraremos um fato mais forte que o lema: provaremos que x é ímpar e portanto não pode ser zero.

Observando a equação acima, vemos que basta provarmos que o número de segmentos $\overline{12}$ sobre os lados do triângulo grande é ímpar.

Como não podemos ter pontos 1 no lado $\overline{23}$ nem pontos 2 no lado $\overline{13}$, todos os segmentos $\overline{12}$ estão sobre o lado $\overline{12}$ do triângulo grande. Provemos que o número de segmentos sobre o lado é ímpar. Para isso, vamos "colocar" vértices 1 ou 2 no lado $\overline{12}$. Assim, no começo, temos somente o lado $\overline{12}$:

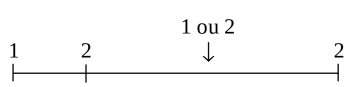
Na hora de colocar vértices, considere o menor segmento em cujo interior colocaremos o vértice. Poderemos estar em uma das seguintes situações:

- Este segmento é do tipo $\overline{11}$:



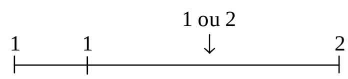
Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda; se colocarmos 2, aumenta de 2. De qualquer forma, a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{22}$:



Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ aumenta de 2; se colocarmos 2, não muda. De qualquer forma a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

• Este segmento é do tipo $\overline{12}$:



Se colocarmos 1 ou 2, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda e é claro que a paridade desse número não muda também.

Logo a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ nunca muda (ou seja, é invariante). Como no começo temos um segmento $\overline{12}$ (o próprio lado $\overline{12}$), temos que o número de segmentos $\overline{12}$ no lado do triângulo grande é sempre ímpar, o que completa nossa demonstração.

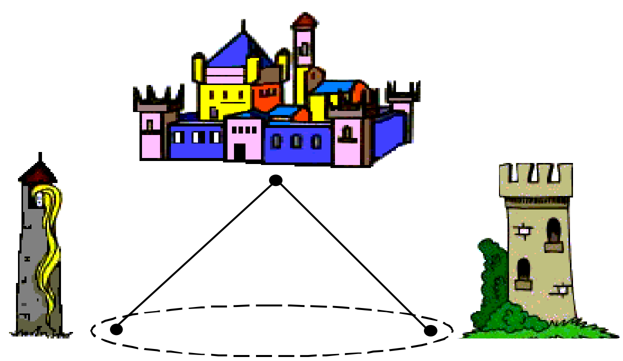
Contar algo de duas maneiras também nos ajuda a demonstrar desigualdades.

Exemplo 2.3.

Na terra de Oz há n castelos e várias estradas, sendo que cada uma liga dois castelos e não há mais do que uma estrada ligando diretamente dois castelos. Diz a lenda que se houver quatro castelos ligados em ciclo (ou seja, se existirem quatro castelos A, B, C e D tais que A e B, B e C, C e D e D e A estão ligados), um dragão aparecerá do centro dos castelos e destruirá a Terra de Oz. Mostre que para esta desgraça não acontecer o número de estradas deve ser menor ou igual a $\left(1+\sqrt{4n-3}\right)n/4$.

Resolução

Considere um castelo ligado a outros dois.



Para cada castelo v do conjunto V dos castelos temos $\binom{d(v)}{2}$ pares de estradas. Para a desgraça não ocorrer, observemos que devemos Ter no máximo um par de estradas asociado a um mesmo par de castelos. Assim, a quantidade de pares de estradas é menor ou igual à quantidade de pares de castelos.

Logo

$$\sum_{v\in V}\binom{d(v)}{2} = \text{pares de estradas} \le \text{pares de castelos} = \binom{n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{v\in V}\left((d(v))^2 - d(v)\right) \le n^2 - n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{v\in V}(d(v))^2 - \sum_{v\in V} d(v) \le n^2 - n \qquad (*)$$

Sabemos que a soma $\sum_{v\in V} d(v)$ é igual ao dobro do número de estradas $2|A|$. Além disso, pode-se mostrar (usando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, ou mesmo Cauchy-Schwarz) que

$$\sum_{v\in V}(d(v))^2 \ge \frac{\left(\sum_{v\in V} d(v)\right)^2}{n} = \frac{4|A|^2}{n}$$

Assim

$$(*) \quad \Rightarrow \frac{4|A|^2}{n} - 2|A| \le n^2 - n \Leftrightarrow 4|A|^2 - 2n|A| - n\left(n^2 - n\right) \le 0 \quad (**)$$

Resolvendo (**) em $|A|$, obtemos

$$\frac{n - n\sqrt{4n-3}}{4} \le |A| \le \frac{n + n\sqrt{4n-3}}{4} \Rightarrow |A| \le \left(1 + \sqrt{4n-3}\right)\frac{n}{4}.$$

Exercícios

02. Dizemos que dois poliedros P e Q são *equidecomponíveis* se é possível cortar o poliedro P em vários poliedros menores e montar, sem deixar espaços vazios e sem sobrar poliedros, o poliedro Q. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ os ângulos diédricos (ângulos entre faces adjacentes) de P e $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ os ângulos diédricos de Q. Mostre que se P e Q são equidecomponíveis então existem números inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n$ e um número inteiro k tais que

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_m\alpha_m - \left(b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + ... + b_n\beta_m\right) = k\pi$$

A partir desta relação podemos mostrar (isto é um pouco mais difícil!!) que um cubo e um tetraedro de mesmo volume não são equidecomponíveis.

03. Dado n inteiro, seja $d(n)$ o número de divisores de n. Seja $\overline{d}(n)$ o número médio de divisores dos números entre 1 e n, ou seja,

$$\overline{d}(n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d(j)$$

Mostre que

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\le\overline{d}(n)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

Esta desigualdade nos mostra que $\overline{d}(n)\cong\ln n$, e que a diferença $\left|\overline{d}(n)-\ln n\right|$ é no máximo 1.

04. (IMO) Num concurso, há m candidatos e n juízes, onde $n\ge 3$ é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo k candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m}\ge\frac{n-1}{2n}$$

Referências Bibliográficas

A parte de grafos foi baseada em um dos capítulos do livro *Mathematical Circles – A Russian Experience*, que aborda o treinamento russo para as olimpíadas.

Muitos dos exercícios de contagem dupla foram extraídos do livro *Proofs From The Book*, que contém as demonstrações consideradas pelos autores (e também por muitos leitores!) as mais elegantes.