XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 1 (5ª e 6ª séries - Ensino Fundamental)

PROBLEMA 1

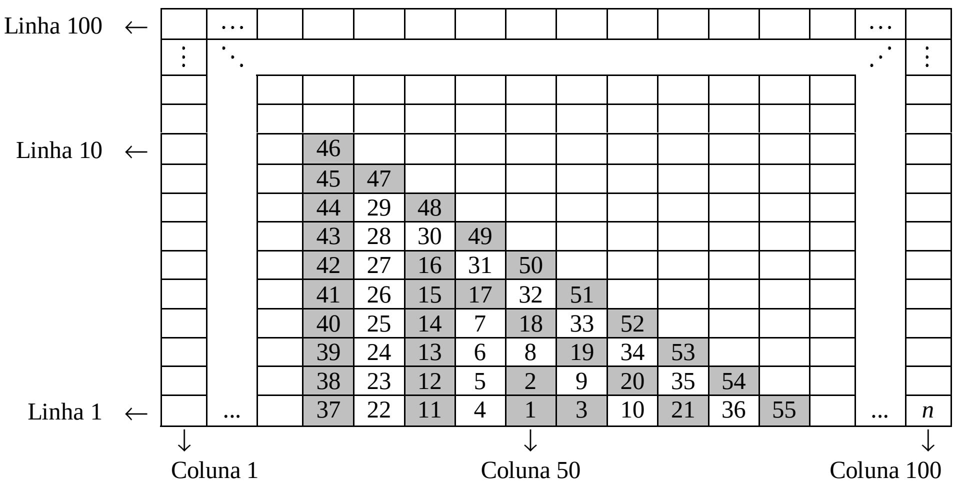
Esmeraldinho tem alguns cubinhos de madeira de 2 cm de aresta. Ele quer construir um grande cubo de aresta 10 cm, mas como não tem cubinhos suficientes, ele cola os cubinhos de 2 cm de aresta de modo a formar apenas as faces do cubo, que fica oco.
Qual é o número de cubinhos de que ele precisará?

PROBLEMA 2

Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo.
De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?
Observação: Triângulo retângulo é todo triângulo que possui um ângulo de 90^o. Os lados que formam esse ângulo são chamados de catetos.

PROBLEMA 3

A partir da casa localizada na linha 1 e na coluna 50 de um tabuleiro 100×100, serão escritos os números 1, 2, 3, 4, ..., *n*, como na figura a seguir, que apresenta uma parte do tabuleiro e mostra como os números deverão ser colocados. O número *n* ocupará a casa da linha 1, coluna 100.



a) Determine *n*.
b) Em qual linha e coluna aparecerá o número 2005?

PROBLEMA 4

No retângulo *ABCD*, com diagonais *AC* e *BD*, os lados *AB* e *BC* medem, respectivamente, 13 cm e 14 cm. Sendo M a intersecção das diagonais, considere o triângulo *BME*, tal que *ME* = *MB* e *BE* = *BA*, sendo $E \neq A$.

a) Calcule a área do triângulo *BME*.
b) Mostre que o segmento *BD* é paralelo ao segmento *EC*.

PROBLEMA 5

Um número inteiro positivo n tem a propriedade P se a soma de seus divisores positivos é igual a $2n$. Por exemplo: 6 tem a propriedade P, pois $1+2+3+6 = 2 \cdot 6$, porém 10 não tem a propriedade P, pois $1+2+5+10 \neq 2 \cdot 10$.
Mostre que nenhum quadrado perfeito tem a propriedade P.
Observação: Um número inteiro positivo é um quadrado perfeito se é igual ao quadrado de um inteiro. Por exemplo, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$ e $9 = 3^2$ são quadrados perfeitos.

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1

Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo.

De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

PROBLEMA 2

No triângulo retângulo *ABC*, os catetos *AB* e *BC* medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm. Seja *M* o ponto médio da hipotenusa *AC* e seja *D* um ponto, distinto de *A*, tal que *BM* = *MD* e *AB* = *BD*.

a) Prove que *BM* é perpendicular a *AD*.

b) Calcule a área do quadrilátero *ABDC*.

PROBLEMA 3

Dado que $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{11}$, qual é o valor de $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$?

XXVII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª. e 8ª. Séries)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4

Em seu treino diário de natação, Esmeraldinho percorre várias vezes, com um ritmo constante de braçadas, o trajeto entre dois pontos A e B situados na mesma margem de um rio. O nado de A para B é a favor da corrente e o nado em sentido contrário é contra a corrente. Um tronco arrastado pela corrente passa por A no exato instante em que Esmeraldinho sai de A. Esmeraldinho chega a B e imediatamente regressa a A. No trajeto de regresso, cruza com o tronco 6 minutos depois de sair de A. A seguir, Esmeraldinho chega a A e imediatamente sai em direção a B, alcançando o tronco 5 minutos depois da primeira vez que cruzou com ele ao ir de B para A. Quantos minutos o tronco leva para ir de A até B?

PROBLEMA 5

Prove que o número $1^{2005} + 2^{2005} + 3^{2005} + \ldots + 2005^{2005}$ é múltiplo de $1 + 2 + 3 + \ldots + 2005$.

PROBLEMA 6

A medida do ângulo B de um triângulo ABC é 120°. Sejam M um ponto sobre o lado AC e K um ponto sobre o prolongamento do lado AB, tais que BM é a bissetriz interna do ângulo $\angle ABC$ e CK é a bissetriz externa correspondente ao ângulo $\angle ACB$. O segmento MK intersecta BC no ponto P. Prove que $\angle APM = 30°$.

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:
Um número natural é palíndromo quando se obtém o mesmo número ao escrevermos os seus dígitos na ordem inversa. Por exemplo, 481184, 131 e 2 são palíndromos.
Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $\underbrace{111...1}_{m \text{ uns}} \cdot \underbrace{111...1}_{n \text{ uns}}$ é palíndromo.

PROBLEMA 2:
Determine o menor número real C para o qual a desigualdade

$$C\left(x_1^{2005} + x_2^{2005} + x_3^{2005} + x_4^{2005} + x_5^{2005}\right) \geq x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \left(x_1^{125} + x_2^{125} + x_3^{125} + x_4^{125} + x_5^{125}\right)^{16}$$

é válida para todos os números reais positivos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

PROBLEMA 3:
Dizemos que um quadrado está contido em um cubo quando todos os seus pontos estão nas faces ou no interior do cubo. Determine o maior $\ell > 0$ tal que existe um quadrado de lado ℓ contido num cubo de aresta 1.

XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
TERCEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:

Temos quatro baterias carregadas, quatro baterias descarregadas e um rádio que necessita de duas baterias carregadas para funcionar.

Supondo que não sabemos quais baterias estão carregadas e quais estão descarregadas, determine o menor número de tentativas suficiente para garantirmos que o rádio funcione. Uma tentativa consiste em colocar duas das baterias no rádio e verificar se ele, então, funciona.

PROBLEMA 5:

Sejam ABC um triângulo acutângulo e F o seu *ponto de Fermat*, isto é, o ponto interior ao triângulo ABC tal que os três ângulos $A\hat{F}B$, $B\hat{F}C$ e $C\hat{F}A$ medem 120 graus. Para cada um dos triângulos ABF, ACF e BCF trace a sua *reta de Euler*, ou seja, a reta que liga o seu circuncentro e o seu baricentro.

Prove que essas três retas concorrem em um ponto.

PROBLEMA 6:

Dados a, c inteiros positivos e b inteiro, prove que existe x inteiro positivo tal que

$$a^x + x \equiv b \pmod{c},$$

ou seja, existe x inteiro positivo tal que c é um divisor de $a^x + x - b$.