

XXVII Olimpíada Brasileira de Matemática
GABARITO Primeira Fase

Soluções Nível Universitário

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Seja $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{(e^x - 1) \cdot x}$. Temos $f(-x) = \frac{e^{-x} - 1 + x}{(e^{-x} - 1) \cdot (-x)} = \frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1) \cdot x}$, logo

$$f(x) + f(-x) = \frac{xe^x - x}{(e^x - 1) \cdot x} = 1. \text{ Assim, } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) + f(-x)) dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Critério de correção:

• Escrever $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) + f(-x)) dx$ ou equivalente: **[2 pontos]**

• Provar que $f(x) + f(-x) = 1$ ou equivalente: **[5 pontos]**

• Solução Completa: **[10 pontos]**

As pontuações a seguir não se somam com as anteriores:

• Encontrar corretamente uma primitiva: **[8 pontos]** (+2 pontos por concluir corretamente)

• Pequenos erros de conta em tentativas de encontrar uma primitiva (desde que o método utilizado de fato leve a uma solução correta): **- 2 pontos**

• Tentativas infrutíferas de encontrar uma primitiva: **[0 pontos]**

SOLUÇÃO E CRITÉRIO DO PROBLEMA 2:

O sólido é a união dos cubos unitários $[i, i + 1) \times [j, j + 1) \times [k, k + 1)$ para i, j, k inteiros não negativos, $i + j + k \leq N$. Como cada cubinho tem volume 1, o volume do sólido é igual ao número de triplas (i, j, k) como acima. **[3 pontos até aqui]**

O número de triplas (e portanto o volume) é igual a $\binom{N+3}{3} = (N+1)(N+2)(N+3)/6$.

Isto pode ser demonstrado de várias formas. Por exemplo, podemos pensar que temos uma fileira de $N + 3$ quadrados e vamos escolher 3 posições e botar um marcador em cada uma delas: i será o número de quadrados antes do primeiro marcador, j o número de quadrados entre o primeiro e o segundo marcadores e k o número de quadrados entre o segundo e o terceiro marcadores. Claramente, a cada configuração corresponde uma tripla e vice-versa. **[+7 pontos]**

Observações:

Se o aluno fizer o problema corretamente mas não justificar a fórmula para o número de triplas então o aluno deve ganhar **[9 pontos]** (ou seja, perde um ponto por não justificar).

Se o aluno ignorar as partes inteiras e calcular o volume do tetraedro corretamente como $N^3/6$ ele deve ganhar **[1 ponto]**.

Se o aluno observar que o sólido está contido no tetraedro acima e está contido no tetraedro de aresta $N + 3$ e concluir que $N^3/6 < \text{VOLUME} < (N + 3)^3/6$ então ele deve ganhar **[2 pontos]** (não cumulativos com o ponto do caso anterior).

SOLUÇÃO E CRITÉRIO DO PROBLEMA 3:

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $0 < \frac{1}{1+f(x)} = f''(x)$, logo f' é crescente em $[0, 1]$ **[2 pontos]**,

o que implica que $f'(x) > 1$ para $x > 0$, ou seja f também é crescente em $[0, 1]$ **[2 pontos]**.

Assim, para $x > 0$, temos $0 < \frac{1}{1+f(x)} = f''(x) = \frac{1}{1+f(x)} < 1$, logo

$$\int_0^x 0 dt < \int_0^x f''(t) dt < \int_0^x 1 dt \Leftrightarrow 0 < f'(x) - f'(0) < x \Leftrightarrow 1 < f'(x) < x+1 \quad \mathbf{[3 \text{ pontos}]} \Rightarrow$$

$$\int_0^x 1 dt < \int_0^x f'(t) dt < \int_0^x (t+1) dt \Leftrightarrow x < f(x) < \frac{x^2}{2} + x \quad \mathbf{[3 \text{ pontos}]}.$$
 Em particular, $f(1) < \frac{3}{2}$.

Observação: Uma demonstração correta de que $f(x) \leq \frac{x^2}{2} + x$, sem o estabelecimento da desigualdade estrita, vale 7 pontos.

PRIMEIRA SOLUÇÃO E CRITÉRIO DO PROBLEMA 4:

Seja r a reta dada, não paralela às assíntotas. Considere o plano euclidiano como subconjunto do plano projetivo, da maneira usual. Seja P o ponto de r sobre a reta do infinito. O feixe de retas paralelas a r corresponde ao feixe de retas do plano projetivo que passam por P . Para cada uma das retas do feixe que corta a hipérbole em dois pontos A e B , o ponto médio M do segmento AB corresponde ao conjugado harmônico de P em relação a A e B **[1 ponto]**. Logo M pertence à reta polar de P em relação à hipérbole **[4 pontos]**. Seja p essa reta polar. Como o pólo da reta do infinito é o centro O da hipérbole, concluímos que p passa por O **[2 pontos]**. Há, portanto, dois casos a considerar:

- 1) Se existe uma tangente à hipérbole paralela à reta r , com ponto de tangência T (e portanto existirá uma outra tangente paralela a r no ponto T' , simétrico de T em relação a O), o lugar geométrico é a reta OT menos o segmento TT' .
- 2) Caso contrário, o lugar geométrico é uma reta completa passando por O , que pode ser obtida traçando-se uma corda arbitrária paralela a r (neste caso toda reta paralela corta a hipérbole em dois pontos distintos, um em cada ramo da hipérbole) e unindo seu ponto médio a O .

[3 pontos pela descrição correta dos 2 casos].

SEGUNDA SOLUÇÃO E CRITÉRIO DO PROBLEMA 4:

Após uma mudança de coordenadas afins, podemos considerar que a hipérbole tem equação $xy = 1$. Sendo m o coeficiente angular da reta r , queremos determinar o lugar geométrico dos pontos médios das intersecções das retas de equações $y = mx + t$ ($t \in \mathbb{R}$) com a hipérbole. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) esses pontos de intersecção. Então x_1 e x_2 são as raízes da equação

$x(mx + t) = 1 \Leftrightarrow mx^2 + tx - 1 = 0$ (1). Logo a abscissa do ponto médio é igual a $-\frac{t}{2}$, e sua

ordenada vale $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2x_1x_2} = \frac{-\frac{t}{2}}{-\frac{2}{m}} = \frac{mt}{4}$. Logo o ponto médio pertence à reta de

equação $y = -\frac{m}{2}x$. Reciprocamente, um ponto dessa reta pertence ao lugar geométrico desde que a equação (1) tenha duas raízes reais, ou seja, quando $t^2 + 4m > 0$. Assim, se $m > 0$, o lugar geométrico é toda a reta de equação $y = -\frac{m}{2}x$. Quando $m < 0$, desta reta devem ser retirados os pontos para os quais $-2\sqrt{m} \leq t \leq 2\sqrt{m}$, ou seja, para os quais $-\sqrt{m} \leq x \leq \sqrt{m}$.

Critério de correção:

As pontuações abaixo NÃO devem ser somadas

- Simplificar a equação da hipérbole mediante uma mudança de coordenadas (transformação):

[2 pontos]

- Isolar a equação do lugar geométrico, identificando-o como uma reta: **[7 pontos]**

- Solução completa, com correta descrição dos casos em que deve ser excluído um segmento da

reta $y = -\frac{m}{2}x$: **[10 pontos]**.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5:

Podemos tomar y_1 como solução particular e $y_2 - y_1$ e $y_3 - y_1$ como soluções linearmente independentes da equação homogênea associada $y''(t) + a(t) \cdot y'(t) + b(t) \cdot y(t) = 0$. Assim a solução geral da equação é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3,$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

ou, equivalentemente,

$$y(t) = (c_4 + c_5 t + t^2) \cdot e^{t^2}. \text{ [3 pontos]}$$

Temos $y(0) = c_4$ e $y'(0) = c_5$, donde as condições do enunciado nos dão $y = t^2 \cdot e^{t^2}$. **[+7 pontos]**

Observações:

Note que não é necessário (nem muito útil) calcular as funções a , b , c . O aluno que obtiver corretamente a , b , c mas não obtiver y deve ganhar **[1 ponto]**.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 6:

Seja $X = [0, 1]^3$. Temos $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$, onde

$$A_1 = \{(x, y, z) \in X \mid x \leq y \leq z\}, A_2 = \{(x, y, z) \in X \mid x \leq z \leq y\},$$

$A_3 = \{(x, y, z) \in X \mid y \leq x \leq z\}$, $A_4 = \{(x, y, z) \in X \mid y \leq z \leq x\}$,
 $A_5 = \{(x, y, z) \in X \mid z \leq x \leq y\}$ e $A_6 = \{(x, y, z) \in X \mid z \leq y \leq x\}$.

Os conjuntos $A_k, 1 \leq k \leq 6$ têm todos volume $1/6$.

Seja agora $Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in X \mid \min\{|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|\} > m\}$. Temos

$Y = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6$, onde $B_k = Y \cap A_k, 1 \leq k \leq 6$.

Todos os conjuntos $B_k, 1 \leq k \leq 6$ têm o mesmo volume. Vamos então calcular o volume do conjunto B_1 . Como X tem volume 1, a probabilidade desejada será $6 \cdot \text{vol}(B_1)$. **[4 pontos]**

Temos $B_1 = \{(x, y, z) \in X \mid y > x + m, z > y + m\}$. Claramente, se $m \geq 1/2$, B_1 é vazio, e portanto a probabilidade desejada é 0 para todo $m \geq 1/2$. **[+1 ponto]**

Suponha agora $0 \leq m \leq 1/2$. Considere a translação $f: B_1 \rightarrow X$ dada por $f(x, y, z) = (x, y - m, z - 2m)$. Temos $f(B_1) = \{(x, y, z) \in [0, 1 - 2m]^3 \mid x < y < z\}$, e portanto $f(B_1)$ tem o mesmo volume de $\{(x, y, z) \in [0, 1 - 2m]^3 \mid x \leq y \leq z\} = g(A_1)$, onde g é a homotetia dada por $g(p) = (1 - 2m)p$. Assim, temos $\text{vol}(B_1) = \text{vol}(f(B_1)) = \text{vol}(g(A_1)) = (1 - 2m)^3 \cdot \text{vol}(A_1) = (1 - 2m)^3 / 6$, e logo, para $0 \leq m \leq 1/2$, a probabilidade desejada é igual a $6 \cdot \text{vol}(B_1) = (1 - 2m)^3$. **[+5 pontos]**