IX OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Pedro escreve todos os números de quatro algarismos diferentes que podem ser armados com dígitos a, b, c, d que cumprem as seguintes condições:

$$a \neq 0 \; ; \; b = a + 2; \; c = b + 2 \; ; \; d = c + 2.$$

Calcule a soma de todos os números que Pedro escreveu.

PROBLEMA 2

O triângulo ABC é retângulo em A e R é o ponto médio da hipotenusa BC. Sobre o cateto maior AB se marca o ponto P tal que $CP = BP$ e sobre o segmento BP se marca o ponto Q tal que o triângulo PQR é equilátero. Se a área do triângulo ABC é 27, calcule a área do triângulo PQR.

PROBLEMA 3

Determine o menor número inteiro positivo que termina em 56, é múltiplo de 56 e tem a soma de seus dígitos igual a 56.

PROBLEMA 4

Célia escolhe um número n e escreve a lista dos números naturais de 1 até n:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n.$$

Em cada passo, troca a lista: copia o primeiro número ao final e apaga os dois primeiros.
Depois de $n - 1$ passos ficará escrito um único número.
Por exemplo, para $n = 6$ os cinco passos são:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \to 3, 4, 5, 6, 1 \to 5, 6, 1, 3 \to 1, 3, 5 \to 5, 1 \to 5$$

e ficará escrito o número 5.

Célia escolheu um número n entre 1000 e 3000 e depois de $n - 1$ passos ficou o número 1.
Determine todos os valores de n que Célia pode ter escolhido.
Justifique porque estes valores servem e os demais não.

PROBLEMA 5

Temos um tabuleiro quadriculado 4×4. Definimos a *separação* entre duas casas como o menor número de movimentos que deve empregar um cavalo de xadrez para ir de uma casa a outra (utilizando movimentos do cavalo). Três casas A, B, C formam um *trio bom* se as três separações entre A e B, entre A e C e entre B e C são iguais. Determine um número de *trios boms* que se formam no tabuleiro.

OBSERVAÇÃO:

Em cada movimento o cavalo se desloca 2 casas em direção horizontal mais uma casa em direção vertical ou se desloca 2 casas em direção vertical mais uma casa em direção horizontal.

IX OLIMPÍADA DE MAIO
SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
São escolhidos quatro dígitos a, b, c, d diferentes entre si e diferentes de zero e se escreve a lista de todos os números de quatro algarismos que se obtém trocando de lugar os dígitos a, b, c, d.
Que dígitos deve-se escolher para que a lista tenha a maior quantidade possível de números de quatro algarismos que sejam múltiplos de 36?

PROBLEMA 2
Seja $ABCD$ um retângulo de lados $AB = 4$ e $BC = 3$. A perpendicular à diagonal BD traçada por A corta BD no ponto H. Chamamos de M o ponto médio de BH e de N o ponto médio de CD. Calcule a medida do segmento MN.

PROBLEMA 3
Encontre todos os pares de números inteiros positivos (a, b) tais que $8b + 1$ é múltiplo de a e $8a + 1$ é múltiplo de b.

PROBLEMA 4
Beto marcou 2003 pontos verdes no plano, de maneira que todos os triângulos com seus três vértices verdes têm área menor que 1.
Demonstre que os 2003 pontos verdes estão contidos num triângulo T de área menor que 4.

PROBLEMA 5
Uma formiga, que está numa aresta de um cubo de lado 8, deve realizar um percurso pela superfície do cubo e regressar ao ponto de partida. Seu caminho deve conter pontos interiores das seis faces do cubo e deve visitar só uma vez cada face do cubo. Encontre o comprimento do caminho mais curto que a formiga pode realizar e justifique porque é o caminho mais curto.