OLIMPIADA IBEROAMERICANA MATEMATICA BOLIVIA 2012

Cochabamba 02/10/12 DURAÇÃO: 4 ½ Horas

(Cada problema vale 7 pontos)

PROVA DIA 1

1. Sobre o retângulo $ABCD$ constroem-se os triângulos equiláteros BCX e DCY, de modo que cada um compartilhe pontos com o interior do retângulo. A reta AX intersecta a reta DC em P. A reta AY intersecta a reta BC em Q. Demonstrar que o triângulo APQ é equilátero.

2. Um inteiro positivo diz-se *bissomado* se puder ser escrito como soma de dois inteiros positivos que tenham a mesma soma dos algarismos. Por exemplo, 2012 é bissomado pois $2012 = 2005 + 7$ e tanto 2005 como 7 têm soma dos algarismos igual a 7.

   Encontrar todos os inteiros positivos que **não são** bissomados.

3. Seja n um inteiro positivo. Dado um conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de inteiros entre 0 e $2^n - 1$ inclusive, associamos a cada um dos seus 2^n subconjuntos a soma dos seus elementos; em particular, o subconjunto vazio tem soma 0. Se estas 2^n somas deixam todas restos distintos na divisão por 2^n, dizemos que o conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é n-completo. Determinar, para cada n, a quantidade de conjuntos n-completos.

OLIMPIADA
IBEROAMERICANA
MATEMATICA
BOLIVIA 2012

Cochabamba 03/10/12 DURAÇÃO: 4 ½ Horas

(Cada problema vale 7 pontos)

PROVA DIA 2

4. Sejam a, b, c, d números inteiros tais que $a-b+c-d$ é ímpar e divide $a^2-b^2+c^2-d^2$. Demonstrar que, para qualquer inteiro positivo n, $a-b+c-d$ divide $a^n-b^n+c^n-d^n$.

5. Seja ABC um triângulo e sejam P e Q os pontos de interseção da paralela a BC por A com as bissetrizes exteriores dos ângulos B e C, respectivamente. A perpendicular a BP por P e a perpendicular a CQ por Q intersectam-se em R. Seja I o incentro de ABC. Demonstrar que $AI = AR$.

6. Demonstrar que, para qualquer inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos tais que nenhum deles é divisível pela soma dos seus respectivos algarismos.