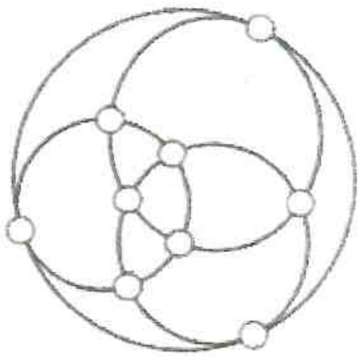
LUANDA - 16 de julho de 2014

1° dia

1. Quatro irmãos têm conjuntamente quarenta e oito Kwanzas. Se ao dinheiro do primeiro se aumentasse três Kwanzas, ao do segundo se retirasse três Kwanzas, se o do terceiro triplicasse e o do quarto se reduzisse a um terço, passariam a ter todos a mesma importância. Quanto tem cada um dos quatro irmãos?

2. Na figura a seguir devem ser colocados em cada um dos pontos brancos um número inteiro de 1 a 9, sem repetição, de forma que a soma dos 3 números pertencentes à circunferência externa seja igual a cada uma das somas dos 4 números pertencentes a uma das circunferências internas e que não estão na circunferência externa.



a) Apresente uma solução.

b) Mostre que em qualquer solução o 9 estará na circunferência externa.

3. No quadrilátero convexo ABCD, sejam P e Q pontos dos lados BC e DC, respectivamente, tais que $\angle BAP = \angle DAQ$. Mostre que se a linha que une os ortocentros dos triângulos ABP e ADQ é ortogonal a AC, então as áreas desses triângulos são iguais.

DURAÇÃO: 4h 30m	CADA QUESTÃO VALE 7 PONTOS

2014 ANGOLA
4ª Olimpíadas de Matemática da CPLP

LUANDA – 17 de julho de 2014

2º dia

4. Pelo ponto K de uma circunferência estão traçadas uma corda KA (o arco KA é maior do que 90°) e uma tangente l. A reta que passa pelo centro da circunferência e é perpendicular ao raio OA, interseta a corda KA no ponto B e a tangente l no ponto C. Prove que os segmentos KC e BC têm o mesmo comprimento.

5. Determine todas as quádruplas de inteiros positivos (k,a,b,c) tais que $2^k = a!+b!+c!$, com $a \geq b \geq c$.

6. Kilua e Ndoti jogam o seguinte jogo num quadrado $ABCD$: Kilua escolhe um dos lados do quadrado e marca o ponto X nesse lado. Ndoti escolhe um dos outros três lados do quadrado e marca o ponto Y sobre ele. Kilua escolhe um dos dois lados que ainda não foi escolhido e marca o ponto Z sobre ele e, finalmente, Ndoti escolhe o lado que ainda não foi escolhido e marca o ponto W nesse lado. Cada um dos dois jogadores pode marcar um vértice do quadrado, mas ele deve primeiro escolher o lado do quadrado que será usado. Por exemplo, se Kilua escolher o lado AB ele pode marcar X no ponto B e isso não impede que o lado BC seja escolhido. Kilua vence se a área do quadrilátero convexo formado pelos pontos marcados for maior ou igual que a metade da área de $ABCD$ e caso contrário Ndoti vence. Não se permite que um mesmo ponto seja escolhido duas vezes.

Quem possui estratégia vencedora, ou seja, pode garantir a vitória não importando as jogadas do adversário? Como esse jogador deve jogar?

DURAÇÃO: **4h 30m**	CADA QUESTÃO VALE 7 PONTOS