XXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA DO CONE SUL – BOLÍVIA

DIA 1. Coroico, 16 de Agosto de 2011

Duração: 4 horas

1. Encontrar todas as ternas de inteiros positivos (x, y, z) tais que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2011$$

2. Em uma lousa estão escritos os números inteiros positivos de 1 até 4^n inclusive. Em cada momento, Pedro apaga dois números da lousa, a e b, e escreve o número $\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2+2b^2}}$. Pedro repete o procedimento até que sobre apenas um número. Demostrar que este número será menor que $\dfrac{1}{n}$, sem importar quais números Pedro escolha em cada momento.

3. Seja ABC um triângulo equilátero. P é um ponto interior tal que a raíz quadrada da distancia de P até um dos lados seja igual à soma das raízes quadradas das distancias de P até os outros dois lados. Encontre o lugar geométrico do ponto P.

XXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA DO CONE SUL – BOLÍVIA

DIA 2. Coroico, 17 de Agosto de 2011

Duração: 4 horas

4. Dizemos que um número de 4 dígitos $\overline{abcd}$ é equilibrado se $a + b = c + d$. Encontre todos os números equilibrados de quatro dígitos que puedem ser expresos como a soma de dois números palíndromos.

5. Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado AC. Se $\angle CBD - \angle ABD = 60^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$ e, além disso $AB \cdot BC = BD^2$, encontre as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

6. Algumas casas de um tabuleiro Q $(2n+1)\times(2n+1)$ são pintadas de preto, de modo que qualquer quadrado 2×2 de Q contenha, no máximo, 2 casas pretas. Achar o número máximo de casas pretas que o tabuleiro pode ter.