IMC 2011 - 1^o DIA

Problema 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que um ponto x é sombra se existe $y \in \mathbb{R}$ com $y > x$ tal que $f(y) > f(x)$. Sejam $a < b$ números reais tais que

- todos os pontos no intervalo $I = (a, b)$ são sombras;
- a e b não são sombras.

Prove que

(a) $f(x) < f(b)$ para todo $a < x < b$;

(b) $f(a) = f(b)$.

Problema 2. Existe matrix real $A_{3\times 3}$ tal que $tr(A) = 0$ e $A^2 + A^t = I$?

Problema 3. Seja p um número primo. Dizemos que um inteiro positivo n é interessante se

$$x^n - 1 = (x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$$

onde f e g são polinômios com coeficientes inteiros.

(a) Prove que o número $p^p - 1$ é interessante.

(b) Para qual p o número $p^p - 1$ é o número interessante minimal?

Problema 4. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos e não vazios. Defina a função

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{(k-1)} t^{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \ldots \cup A_{i_k}|}$$

Prove que f é não decrescente em $[0, 1]$.

Problema 5. Sejam n um inteiro inteiro positivo e V um espaço vetorial de dimensão $2n-1$ sobre o corpo de dois elementos. Prove que para quaisquer vetores arbitrarios $v_1, v_2, \ldots, v_{4n-1}$, existe uma sequência $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{2n} \le 4n - 1$ de índices tais que $v_{i_1} + v_{i_2} + \ldots + v_{i_{2n}} = 0$.

IMC 2011 - 2^o DIA

Problema 1. Seja $(a_n)_{n-0}^{\infty}$ uma sequência com $\frac{1}{2} < a_n < 1$ para todo $n \geq 0$. Defina a sequência $(x_n)_{n-0}^{\infty}$ como

$$x_0 = a_0,\ x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}\ (n \geq 0).$$

Quais são os possíveis valores para $\lim_{n\to\infty} x_n$? É possível que essa sequência seja divergente?

Problema 2. Uma raça alienígena tem três gêneros: homem, mulher e neutro. Uma tripla casada consiste de três pessoas, um de cada gênero, os quais todos se gostam. Cada pessoa só pode pertencer a no máximo uma tripla casada. Sentimentos são sempre multuos - se x gosta de y, então y gosta de x.

A raça está mandando uma expedição para colonizar um planeta. A expedição tem n homens, n mulheres e n neutros. Sabe-se que cada membro da expedição gosta de k pessoas de cada um dos dois gêneros. O problema é criar tantas triplas casadas quanto possível.

(a) Mostre que se n é par e $k = \frac{n}{2}$, então pode ser impossível criar até mesmo uma tripla casada.

(b) Mostre que se $k \geq \frac{3n}{4}$, então é sempre possível criar n casamentos disjuntos, casando assim toda os membros da expedição.

Problema 3. Determine o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) \cdot \ln(1 + \frac{1}{2n}) \cdot \ln(1 + \frac{1}{2n+1})$$

Problema 4. Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes reais de grau n. Suponha que $\frac{f(k)-f(m)}{k-m}$ seja inteiro para todos os inteiros $0 \leq k < m < n$. Prove que $a - b$ divide $f(a) - f(b)$ para todo par de inteiros distintos a e b.

Problema 5. Seja $F = A_0A_1 \ldots A_n$ um polígono convexo no plano. Para todo $1 \leq k \leq n-1$, defina o operador f_k, que troca F por um novo polígono

$$f_k(F) = A_0 \ldots A_{k-1}A'_kA_{k-1} \ldots A_n,$$

onde A'_k é o ponto simétrico a A_k com respeito à mediatriz de A_kA_{k-1}. Prove que $(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{n-1})^n(F) = F$. Assuma que todas as operações sejam bem definidas nos polígonos considerados, isto é, que os resultados sejam novamento polígonos convexos ($A_0, A_1, \ldots, A_n$ são os vertices de F em ordem consecutiva).