XXXI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Dia 1

27 de Setembro de 2016

Problema 1

Determine todos os números primos positivos p, q, r, k tais que $pq + qr + rp = 12k + 1$.

Problema 2

Encontre todas as soluções reais positivas do sistema de equações:

$$x = \frac{1}{y^2 + y - 1}$$
$$y = \frac{1}{z^2 + z - 1}$$
$$z = \frac{1}{x^2 + x - 1}$$

Problema 3

Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. As tangentes a Γ por B e C se intersectam em P. Sobre o arco AC que não contém B considera-se um ponto M, diferente de A e de C, tal que a reta AM intersecta a reta BC em K. Sejam R o ponto simétrico de P em relação à reta AM e Q o ponto de interseção das retas RA e PM. Sejam J o ponto médio de BC e L o ponto onde a paralela a PR por A intersecta a reta PJ. Mostre que os pontos L, J, A, Q e K pertencem a uma mesma circunferência.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Pontuação de cada problema: 7 pontos

XXXI OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

Dia 2

28 de Setembro de 2016

Problema 4

Determine a maior quantidade de bispos que podem ser colocados num tabuleiro de xadrez 8×8 tal que não existam dois bispos na mesma casa e cada bispo seja ameaçado por no máximo um dos outros bispos.

Nota: Um bispo ameaça outro se eles se encontram em duas casas distintas de uma mesma diagonal. As diagonais do tabuleiro são as 2 diagonais principais e as suas paralelas.

Problema 5

As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se intersectam em dois pontos distintos A e K. A tangente comum a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ mais próxima de K é tangente a $\mathcal{C}_1$ em B e a $\mathcal{C}_2$ em C. Sejam P o pé da perpendicular por B a AC e Q o pé da perpendicular por C a AB. Se E e F são os pontos simétricos de K em relação às retas PQ e BC, respectivamente, prove que os pontos A, E e F são colineares.

Problema 6

Sejam k um inteiro positivo e $a_1, a_2, \ldots, a_k$ digitos. Prove que existe um inteiro positivo n tal que os últimos $2k$ digitos de 2^n são, nessa ordem, $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$, para certos digitos $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Pontuação de cada problema: 7 pontos