



19ª Olimpíada Matemática do Cone Sul

Temuco – CHILE

Primeiro Dia – 20 de maio

PROBLEMA 1

Defina $I(n)$ como o resultado de inverter os números de um algarismo. Por exemplo, $I(123) = 321$, etc. Calcule todos os inteiros $1 \leq n \leq 10000$ tais que $I(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo, P um ponto em seu interior e X , Y e Z pontos em BC , AC e AB respectivamente tais que $\angle PZB = \angle PXC = \angle PYA$. Considere os pontos U , W e V sobre BC , AC e AB (ou seus prolongamentos, se necessário) tais que $PV = 2PY$; $PU = 2PX$ e $PW = 2PZ$. Sabendo que a área de XYZ é 1, calcule a área de UVW .

PROBLEMA 3

Dois amigos A e B devem resolver a seguinte adivinha: cada um deles recebe um número do conjunto $\{1, 2, \dots, 250\}$ mas não vê o número que o outro recebeu. O objetivo é que cada amigo descubra o número do outro. O procedimento que devem seguir é anunciar, por turnos, números inteiros positivos não necessariamente distintos: primeiro A diz um número, em seguida B diz um número, depois novamente A , etc., de modo que a soma de todos os números anunciados seja 20. Demonstrar que existe uma estratégia de modo que, através de um acordo prévio A e B possam atingir o objetivo, sem importar quais números cada um receba no começo da adivinha.

Segundo Dia – 21 de maio

PROBLEMA 4

Qual é o maior número de casas que se pode colorir num tabuleiro 7×7 de maneira que todo subtabuleiro 2×2 tenha no máximo 2 casas coloridas?

PROBLEMA 5

Seja ABC um triângulo isósceles de base AB . Uma semicircunferência C com centro no segmento AB e tangente aos lados iguais AC e BC . Considera-se uma reta tangente a C que corta os segmentos AC e BC em D e E , respectivamente.

Suponha que as retas perpendiculares a AC e BC , traçadas respectivamente por D e E , se cortam em P interior ao triângulo ABC . Seja Q o pé da perpendicular à reta AB que passa por P .

Demonstrar que $\frac{PQ}{CP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{AC}$.

PROBLEMA 6

Dizemos que um número é capícia se ao inverter a ordem de seus algarismos obtivermos o mesmo número. Achar todos os números que tem pelo menos um múltiplo não-nulo que seja capícia.