



XXIII OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DOS PAÍSES DO CONE SUL

LIMA - PERÚ, 2012

Terça-feira, 30 de Outubro de 2012

PRIMEIRO DIA

Problema 1.

Ao redor de uma circunferência estão escritos 2012 números, cada um deles é igual a 1 ou a -1 . Se não há 10 números consecutivos cuja soma seja 0, ache todos os valores possíveis da soma dos 2012 números.

Problema 2.

Em um quadrado $ABCD$, seja P um ponto sobre o lado CD , distinto de C e D . No triângulo ABP traça-se as alturas AQ e BR , e seja S o ponto de interseção das retas CQ e DR . Demonstre que $\angle ASB = 90^\circ$.

Problema 3.

Demonstre que não existem inteiros positivos a, b, c, d , primos entre si dois a dois, tais que $ab + cd$, $ac + bd$, e $ad + bc$ sejam divisores ímpares de

$$(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d).$$

Idioma: Português

*Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos.*

XXIII OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DOS PAÍSES DO CONE SUL

LIMA - PERÚ, 2012

Quarta-feira, 31 de Outubro de 2012

SEGUNDO DIA

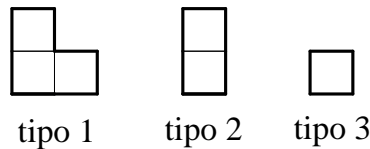
Problema 4.

Encontre o maior inteiro positivo n , menor que 2012, que cumpra a seguinte propriedade:

Se p é um divisor primo de n , então $p^2 - 1$ é um divisor de n .

Problema 5.

A e B jogam alternadamente sobre um tabuleiro 2012×2013 com peças suficientes dos tipos:



Em seu turno, A deve colocar uma peça do tipo 1 sobre casas vazias de tabuleiro. B , em seu turno, deve colocar exatamente uma peça de cada tipo sobre casas vazias do tabuleiro. Perde o jogador que não puder realizar sua jogada. Se A é o primeiro a jogar, determine quem possui uma estratégia vencedora.

Observação: As peças podem ser rotacionadas, mas não podem se sobrepor, nem sair do tabuleiro. As peças do tipo 1, 2 e 3 cobrem exatamente 3, 2 e 1 casas do tabuleiro, respectivamente.

Problema 6.

Considere um triângulo ABC com $1 < \frac{AB}{AC} < \frac{3}{2}$. Sejam M e N respectivamente pontos variáveis sobre os lados AB e AC , distintos de A , tais que $\frac{MB}{AC} - \frac{NC}{AB} = 1$. Demonstre que a circunferência circunscrita do triângulo AMN passa por um ponto fixo distinto de A .

Idioma: Português

Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos.