**Asunción, 4 de junho de 2013**

**Dia 1**

**Problema 1**

Sobre uma reta marcamos quatro pontos distintos. Para cada ponto marcado é calculada a soma das distâncias deste ponto aos outros três, obtendo assim quatro valores.
Decidir se é possível que os quatro valores sejam, em alguma ordem:

a) 29, 29, 35, 37 ; b) 28, 29, 35, 37 ; c) 28, 34, 34, 37.

**Problema 2**

Em um triângulo $ABC$, denotamos por $M$ o ponto médio do lado $BC$ e por $I$ o ponto de interseção de suas bissetrizes. Se $IM = IA$, determinar o menor valor possível para a medida do ângulo $\angle AIM$.

**Problema 3**

Semciclolándia é um pais com 500 cidades e 2013 estradas de mão dupla, cada uma conectando diretamente duas cidades. Duas cidades A e B são chamadas de *vizinhas* se existe uma estrada que as conecta e duas cidades A e B são chamadas de *quase-vizinhas* se existe uma cidade C tal que A é vizinha de C e C é vizinha de B.
Sabemos que em Semciclolándia não existem duas cidades conectadas diretamente por mais de uma estrada e não existem quatro cidades A, B, C e D tais que simultaneamente A é vizinha de B, B é vizinha de C, C é vizinha de D e D é vizinha de A.
Demonstrar que existe uma cidade que é quase-vizinha de pelo menos 57 cidades.

Versão em Português
Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos

**Asunción, 5 de junho de 2013**

**Dia 2**

**Problema 4**

Seja $M$ o conjunto dos números inteiros de 1 até 2013 inclusive.
A cada um dos subconjuntos de $M$ atribuímos uma das $k$ cores disponíveis, com a condição de que, se dois conjuntos distintos $A$ e $B$ cumprem que $A \cup B = M$, então aos conjuntos $A$ e $B$ são atribuídas cores distintas. Qual é o menor valor possível que pode ter $k$?

**Problema 5**

Seja $d(k)$ o número de divisores positivos do inteiro $k$. Um número $n$ é chamado *equilibrado* se:

$$d(n-1) \leq d(n) \leq d(n+1) \text{ ou } d(n-1) \geq d(n) \geq d(n+1).$$

Demonstrar que existem infinitos números equilibrados.

**Problema 6**

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Demonstrar que existem $n$ triângulos da mesma área cumprindo todas as seguintes propriedades:

- Seus interiores são disjuntos, isto é, os triângulos não se sobrepõem;
- Cada triângulo está contido em $ABCD$ ou em seu interior;
- A soma das áreas dos triângulos é pelo menos $\frac{4n}{4n+1}$ da área do quadrilátero $ABCD$.

Versão em Português
Duração: 4 horas
Cada problema vale 10 pontos