XIII OLIMPÍADA DE MAIO
PRIMEIRO NÍVEL

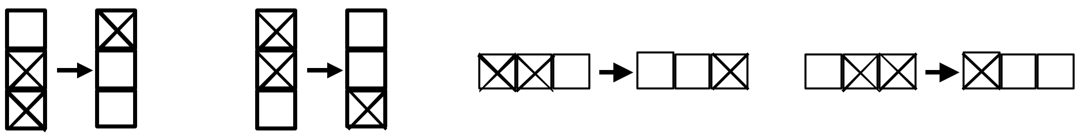
Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
<u>Justifique cada uma das respostas</u>
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1
Num ano que tem 53 sábados, que dia da semana é 12 de maio?
Diga todas as possibilidades.

PROBLEMA 2
Sejam $X = a1b9$ e $Y = 51ab$ dois números inteiros positivos onde a e b são dígitos. Sabe-se que X é múltiplo de um número positivo n de dois dígitos e Y é o próximo múltiplo desse número n. Encontre o número n e os dígitos a e b. Justifique por que não há outras possibilidades.

PROBLEMA 3
Jorge escolhe 6 números inteiros positivos distintos e escreve um em cada face de um cubo. Joga o cubo três vezes.
Na primeira vez o cubo mostrou o número 5 para cima e, além disso, a soma dos números das faces laterais foi 20.
Na segunda vez o cubo mostrou o número 7 para cima e, além disso, a soma dos números das faces laterais foi 17.
Na terceira vez o cubo mostrou o número 4 para cima e, além disso, todos os números das faces laterais eram primos.
Quais são os números que Jorge escolheu e como os distribuiu nas faces do cubo? Analise todas as possibilidades.
Lembre que o número 1 não é primo.

PROBLEMA 4
Um tabuleiro 7×7 tem uma lâmpada em cada uma de suas 49 casas, que pode estar acesa ou desligada. A operação permitida é escolher 3 casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna que tenham duas lâmpadas vizinhas entre si acesas e a outra desligada, e trocar o estado das três. Quer dizer:



Exiba uma configuração de exatamente 8 lâmpadas acesas localizadas nas primeiras 4 linhas do tabuleiro tais que, mediante uma sucessão de operações permitidas, cheguemos a ter uma única lâmpada acesa no tabuleiro e que esta esteja localizada na última linha. Mostre a seqüência de operações que se utilizam para alcançar o objetivo.

PROBLEMA 5
Temos um pentágono de papel, $ABCDE$, tal que
$AB = BC = 3$cm, $CD = DE = 5$cm, $EA = 4$cm; $A\hat{B}C = 100°$, $C\hat{D}E = 80°$.
Mostre como dividir o pentágono em quatro triângulos, mediante três cortes retos, de modo que com os quatro triângulos se forme um retângulo, sem buracos nem superposições. (Os triângulos podem ser girados e/ou virados.)

XIII Olimpíada de Maio
Sábado, 12 de maio de 2007

XIII OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Olimpíada de Mayo

Duração da prova: 3 horas
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Determinar o maior número natural que tem todos os seus dígitos distintos e é múltiplo de 5, de 8 e de 11.

PROBLEMA 2

Seja $n > 2$ um inteiro par. Nas casas de um tabuleiro de $n \times n$ devem-se colocar fichas de modo que em cada coluna a quantidade de fichas seja par e distinta de zero, e em cada linha a quantidade de fichas seja ímpar.

Determinar a menor quantidade de fichas que precisamos colocar no tabuleiro para cumprir esta regra.

Mostrar uma configuração com essa quantidade de fichas e explicar porque com menos fichas não se pode cumprir a regra.

PROBLEMA 3

Oito meninos, todos de estaturas distintas, devem formar uma fila ordenada de menor a maior altura. Diremos que a fila tem exatamente um erro se há um menino que está imediatamente atrás de um mais alto, e todos os demais (salvo o primeiro da fila) estão imediatamente atrás de um mais baixo. De quantas maneiras os oito meninos podem formar uma fila com exatamente um erro?

PROBLEMA 4

Alex e Bruno escrevem, entre os dois, um número natural de 6 dígitos distintos. Cada um, na sua vez, escreve um dígito à direita do último dígito que o outro escreveu. (Está proibido escrever um dígito que já foi usado.)

Bruno ganha se o número de 6 dígitos é primo. Em caso contrário, ganha Alex.

Determinar qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora e explicar como deve fazer para ganhar sem importar quão bem jogue o outro.

PROBLEMA 5

Num triângulo ABC, $\hat{A} = 2\hat{C}$ e $2\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$. A bissetriz do ângulo $\hat{C}$ corta o lado AB em E, e F é o ponto médio do segmento AE. A altura correspondente ao lado BC é AD. A mediatriz do segmento DF corta o lado AC em M.

Demonstrar que $AM = CM$.