XVIII OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Pablo disse: "Somo 2 ao dia do meu aniversário e multiplico o resultado por 2. Somo 4 ao número obtido e multiplico o resultado por 5. Ao novo número obtido somo o número do mês do meu aniversário (por exemplo, se é junho, somo 6) e obtenho 342."
Qual é a data do aniversário de Pablo? Encontre todas as possibilidades.

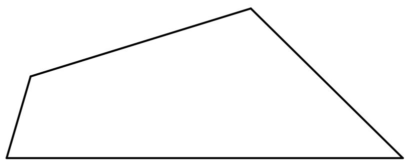
PROBLEMA 2

Chamamos $S(n)$ à soma dos algarismos do inteiro n. Por exemplo, $S(327) = 3+2+7 = 12$.
Encontre o valor de

$$A = S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + ... + S(2011) - S(2012).$$

(A tem 2012 termos).

PROBLEMA 3



A partir de um quadrilátero de papel, como o da figura ao lado, deve-se recortar um novo quadrilátero cuja área seja igual à metade da área do quadrilátero original. Somente podemos dobrar o papel uma ou mais vezes e cortar por algumas das linhas das dobras.
Descreva as dobras e os cortes e justifique por que a área obtida é a metade.

PROBLEMA 4

Pedro tem 111 fichas azuis e 88 fichas brancas. Existe uma máquina que faz dois tipos de operações: uma é trocar 14 fichas azuis por 11 fichas brancas e outra é trocar 7 fichas brancas por 13 azuis. Determine se Pedro pode conseguir, mediante sucessivas operações com a máquina, aumentar em 33 o número total de fichas, de modo que a quantidade de fichas azuis seja igual a $\frac{5}{3}$ da quantidade de fichas brancas.
Se isto for possível, indique como fazê-lo. Se não é possível, explique por quê.

PROBLEMA 5

Em uma reunião há 12 pessoas. Sabemos que para cada duas pessoas A e B da reunião há (pelo menos) uma outra pessoa C da reunião que é amiga de A e de B. Determine o número mínimo de pares de amigos que há na reunião.

Obs: Cada pessoa pode integrar vários pares de amigos. Se X é amigo de Y então Y é amigo de X.

XVIII OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações.
Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.
Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.
Justifique cada uma das respostas
Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Um número de quatro algarismos é *gago* se tem os dois primeiros algarismos iguais entre si e os dois últimos algarismos iguais entre si. Por exemplo, 3311 e 2222 são números gagos. Encontre todos os números gagos de quatro algarismos que são quadrados perfeitos.

PROBLEMA 2

Temos dois octógonos regulares de papelão. Os vértices de cada octógono são numerados de 1 a 8, em qualquer ordem (a ordem para um octógono pode ser diferente da ordem do outro). Em seguida os octógonos são sobrepostos, de modo que cada vértice de um deles fique em contato com um vértice do outro. Os números dos vértices em contato são multiplicados, e soma-se os 8 produtos obtidos.
Demonstre que, qualquer que seja a ordem em que tenham sido numerados os vértices, sempre é possível sobrepor os octógonos de maneira que a soma obtida seja maior ou igual a 162.

PROBLEMA 3

No triângulo ABC, verificamos que $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ e $\widehat{A} > 90^{\circ}$. Seja M o ponto médio de BC. A perpendicular por C ao lado AC corta a reta AB no ponto D. Demonstre que $A\widehat{M}B = D\widehat{M}C$.

PROBLEMA 4

Temos seis pontos de maneira que não haja três pontos colineares e que os comprimentos dos segmentos determinados por estes pontos sejam todos distintos. Consideramos todos os triângulos que têm seus vértices nesses pontos. Demonstre que um dos segmentos é, ao mesmo tempo, o menor lado de um desses triângulos e o maior lado de outro.

PROBLEMA 5

Temos 27 caixas em fila; cada uma delas contém pelo menos 12 bolinhas. A operação permitida é transferir uma bolinha de uma caixa para sua vizinha da direita, se essa vizinha da direita tem mais bolinhas. Dizemos que uma distribuição inicial das bolinhas é *feliz* se é possível, mediante uma sucessão de operações permitidas, fazer com que todas as bolinhas fiquem numa mesma caixa. Determine o menor número total de bolinhas de uma distribuição inicial feliz.