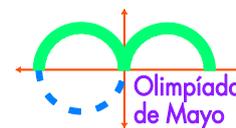


20ª OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL



Duração da prova: 3 horas

Cada problema vale 10 pontos.

Não é permitido o uso de máquina de calcular, equipamentos eletrônicos nem livros ou anotações.

Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.

Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.

Justifique cada uma das respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

Um número natural N é *bom* se os seus dígitos são 1, 2 ou 3 e todos os números de 2 dígitos formados por dígitos localizados em posições consecutivas de N são números distintos. Existe algum número bom de 10 dígitos? E de 11 dígitos?

PROBLEMA 2

Beatriz tem três dados em cujas faces estão escritas letras diferentes. Ao lançar os três dados sobre uma mesa, e escolhendo cada vez somente as letras das faces voltadas para cima, formaram-se as palavras

OSA , VIA , OCA , ESA , SOL , GOL , FIA , REY , SUR , MIA , PIO , ATE , FIN , VID.

Determine as seis letras de cada dado.

PROBLEMA 3

Temos nove caixas. Na primeira caixa há 1 pedra, na segunda há 2 pedras, na terceira há 3 pedras, e assim sucessivamente, na oitava há 8 pedras e na nona há 9 pedras. A operação permitida é retirar o mesmo número de pedras de duas caixas distintas e colocá-las numa terceira caixa. O objetivo é que todas as pedras fiquem numa mesma caixa. Descreva como isto deve ser feito com um número mínimo de operações permitidas. Explique por que isto é impossível de ser feito com menos operações.

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo retângulo e isósceles, com $C = 90^\circ$. Sejam M o ponto médio de AB e N o ponto médio de AC . Seja P tal que MNP é um triângulo equilátero com P no interior do quadrilátero $MBCN$.

Calcule a medida do ângulo CAP .

PROBLEMA 5

Dadas 6 bolinhas: 2 brancas, 2 verdes, 2 vermelhas, sabemos que há uma branca, uma verde e uma vermelha que pesam 99 g cada uma e que as demais bolinhas pesam 101 g cada uma. Determine o peso de cada bolinha usando duas vezes uma balança de dois pratos.

Obs: Uma balança de dois pratos somente informa se o prato esquerdo pesa mais, igual ou menos do que o prato direito.

20ª OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL



Duração da prova: 3 horas.

Cada problema vale 10 pontos.

Não é permitido o uso de máquina de calcular, equipamentos eletrônicos nem livros ou anotações.

Indique sempre em cada folha de resposta seu nome e o número do problema que você está resolvendo.

Não utilize uma mesma folha para resolver mais de um problema.

Justifique cada uma das respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 25 de maio.

PROBLEMA 1

O caminho que vai desde o povoado até o refúgio na montanha tem 76 km. Um grupo de andinistas o percorreu em 10 dias, de forma tal que em dois dias consecutivos nunca caminharam mais de 16 km, porém em três dias consecutivos sempre caminharam por pelo menos 23 km. Determine a quantidade máxima de quilômetros que eles podem ter percorrido num dia.

PROBLEMA 2

Num quadrilátero convexo $ABCD$, sejam M , N , P e Q os pontos médios dos lados AB , BC , CD e DA respectivamente. Se os segmentos MP e NQ dividem $ABCD$ em quatro quadriláteros com a mesma área, demonstre que $ABCD$ é um paralelogramo.

PROBLEMA 3

Ana e Luca jogam o seguinte jogo: Ana escreve uma lista de n números inteiros distintos.

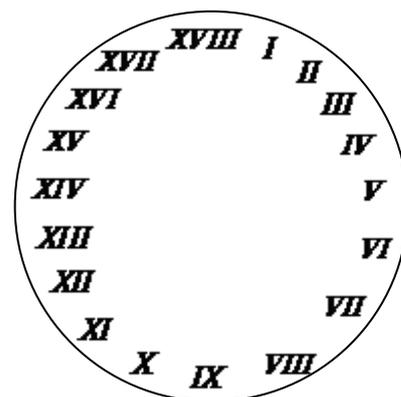
Luca vence o jogo se puder escolher quatro números distintos, a , b , c e d , de modo que o número $a + b - (c + d)$ seja múltiplo de 20.

Determine o valor mínimo de n para o qual, qualquer que seja a lista de Ana, Luca vence o jogo.

PROBLEMA 4

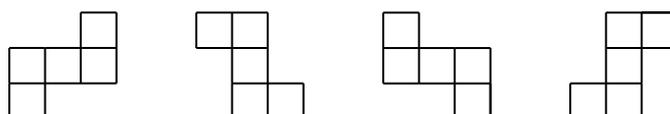
Numa escavação na antiga Roma foi encontrado um relógio bastante incomum com 18 divisões marcadas com números romanos (ver figura).

Infelizmente o relógio estava partido em 5 pedaços. A soma dos números em cada pedaço era a mesma. Mostre de que maneira o relógio pode estar partido.



PROBLEMA 5

Cada casa de um tabuleiro de $n \times n$, com $n \geq 3$, está pintada com uma cor dentre 8 cores diferentes. Para que valores de n podemos afirmar que alguma das seguintes figuras



incluídas no tabuleiro contém duas casas da mesma cor?